



МАТЕМАТИКА И ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕМ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

МАТЕРИАЛЫ

XVII ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Иркутск, 26–28 марта 2024 г.



ISBN 978-5-9624-2275-6

УДК 51(077)(063)
ББК 22.1р30л0
М33

*Рекомендовано к печати Учебно-методическим советом
Педагогического института ИГУ*

Под общей редакцией З. А. Дулатовой

Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании : материалы XVII Всероссийской научно-практической конференции. Иркутск, 26–28 марта 2024 г. / ФГБОУ ВО «ИГУ» ; под общ. ред. З. А. Дулатовой. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2024. – 1 электронный оптический диск (CD-ROM). – Заглавие с этикетки диска.

ISBN 978-5-9624-2275-6

В материалах отражены вопросы особенностей отбора содержания и организации обучения математике в процессе реализации требований ФГОС в общем и профессиональном образовании, внедрения современных методов обучения, организации проектной и исследовательской деятельности обучающихся с применением математики, организации оценки результатов обучения в современных условиях, подготовки учащихся к прохождению итоговых государственных испытаний.

Предназначено для учителей и преподавателей математики, студентов математических профилей вузов.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Иркутский государственный университет»

664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1; тел. +7(3952) 52-19-00

Издательство ИГУ, 664082, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124

тел. +7(3952) 52-18-53; e-mail: izdat@lawinstitut.ru

Подписано к использованию 06.05.2024. Тираж 13 экз. Объем 9,65 Мб.

Тип компьютера, процессор, частота:	32-разрядный процессор, 1 ГГц или выше
Оперативная память (RAM):	256 МБ
Необходимо на винчестере:	320 МБ
Операционные системы:	ОС Microsoft® Windows® XP, 7, 8 или 8.1. ОС Mac OS X
Видеосистема:	Разрешение экрана 1024x768
Акустическая система:	Не требуется
Дополнительное оборудование:	Не требуется
Дополнительные программные средства:	Adobe Reader 6 или выше



ISBN 978-5-9624-2275-6

МАТЕМАТИКА И ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕМ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

МАТЕРИАЛЫ

XVII ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Иркутск, 26–28 марта 2024 г.



ISBN 978-5-9624-2275-6

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Иркутский государственный университет»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА И ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕМ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

МАТЕРИАЛЫ
XVII ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
Иркутск, 26–28 марта 2024 г.



УДК 51(077)(063)
ББК 22.1р30л0
М33

*Рекомендовано к печати Учебно-методическим советом
Педагогического института ИГУ*

Под общей редакцией З. А. Дулатовой

М33

Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании : материалы XVII Всероссийской научно-практической конференции. Иркутск, 26–28 марта 2024 г. / ФГБОУ ВО «ИГУ» ; под общ. ред. З. А. Дулатовой. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2024. – 1 электронный оптический диск (CD-ROM). – Заглавие с этикетки диска.

ISBN 978-5-9624-2275-6

В материалах отражены вопросы особенностей отбора содержания и организации обучения математике в процессе реализации требований ФГОС в общем и профессиональном образовании, внедрения современных методов обучения, организации проектной и исследовательской деятельности обучающихся с применением математики, организации оценки результатов обучения в современных условиях, подготовки учащихся к прохождению итоговых государственных испытаний.

Предназначено для учителей и преподавателей математики, студентов математических профилей вузов.

УДК 51(077)(063)
ББК 22.1р30л0

ISBN 978-5-9624-2275-6

© ФГБОУ ВО «ИГУ», 2024

Артемьева С. В., Курьякова Т. С.	
Условная вероятность в школьном курсе математики	6
Артемьева С. В., Курьякова Т. С., Мухина К. А.	
Приемы решения систем, содержащих степенно-показательные уравнения	12
Артемьева С. В., Курьякова Т. С., Шагабутдинова Е. А.	
Метод дополнительных построений	16
Бакулина А. В., Н. В. Юдина	
Финансовые задачи на уроках статистики и теории вероятности в 7-м и 10-м классах.....	20
Бардаханова Л. С., Бардаханова М. В.	
Роль задач в изучении геометрии	24
Брель Л. П.	
«Посмотрим на маленьких»: масштабирование комбинаторных задач	27
Бычкова О. И., Колченова Ю. В., Константинова И. О.	
Особенности введения понятий на уроках геометрии в 7–9-х классах	32
Бычкова О. И., Соболева Е. В.	
Воспитательные функции сюжетных задач на уроках математики в 5–6-х классах	36
Бычкова О. И., Чернышова А. А.	
Особенности обучения решению комбинаторных задач способом построения дерева возможных вариантов учащихся 5–6-х классов как одно из средств формирования математической грамотности	41
Гиматдинова Г. Н.	
Методические рекомендации по изучению темы «Испытания Бернулли»	48
Губарь О. М.	
Технология смешанного обучения на уроках математики: новые возможности для эффективного обучения	52
Добрынина Л. А.	
Развитие творческой самостоятельности на уроке математики	55
Дробышева С. Е.	
Развитие универсальных познавательных действий в процессе обучения методам решения нестандартных математических задач в 5-х классах	59

Дулатова З. А., Ковыршина А. И., Лапшина Е. С., Штыков Н. Н.	
Решение заданий Всероссийского профессионального конкурса для учителей и преподавателей математики «Субстанция»	65
Зыкова Е. Э.	
Новое задание по теме «Векторы» на ЕГЭ в 2024 году по математике профильного уровня	69
Иванов И. А.	
Основные теоремы дифференциального исчисления в школьном курсе алгебры и начал математического анализа	74
Клейменов В. Ф.	
Особенности преподавания дисциплины «Дискретная математика с элементами математической логики» в машиностроительном колледже	79
Кобленева М. А., Бодякина Г. И.	
Математические приемы при решении геометрических задач	82
Коваленко Е. С.	
Обучение решению задач на вычисление расстояний и углов в пространстве	84
Коваленко Е. С.	
Применение элементов высшей математики к решению задач школьного курса геометрии	89
Кокорина Т. А.	
К вопросу об обучении основам криптографии в высшем педагогическом образовании математической направленности	94
Краснова А. А.	
Разработка практического задания по созданию условий междисциплинарного обучения	98
Кузуб Н. М.	
К вопросу об изучении стереометрии в старших классах средней школы	102
Кузуб Н. М., Зинатулина А. М.	
Инверсные образы эллипса	105
Лищук Е. В., Рыбкина Т. И.	
Индивидуальный проект учащихся как метод подготовки к ГИА по математике	111
Малышенко Н. В.	
Применение принципа продуктивного повторения при организации внеурочной деятельности по математике в 5–6-х классах	115
Петрова Т. А., Ермакова О. В.	
Исследовательская деятельность обучающихся как важный ресурс формирования ключевых компетенций	118
Полякова М. Н., Куприкова И. Ю.	
Формирование личностных качеств при создании индивидуальных профайлов для уроков по теории вероятностей и статистики	121

Присакарь С. В.	
Организация исследовательской деятельности во внеурочной деятельности	125
Просандеева И. А., Юрчишина Н. А.	
Практико-ориентированные задачи на уроках математики как средство повышения уровня математической грамотности обучающихся	129
Савватеева Н. Н., Кузнецова Э. В.	
Функциональная грамотность как показатель уровня образования современных школьников	132
Собещикова С. М., Валько О. В., Садовская О. Н.	
Дидактические материалы для проведения мероприятия по финансовой грамотности	136
Сотникова Л. О.	
Профессиональная ориентация обучающихся в рамках предметной области «Математика»	139
Стерхов А. П.	
Турнир памяти Александра Александровича Кошкина	142
Фаткулова Н. С.	
Диагностика уровня учебных достижений обучающихся как один из эффективных способов повышения качества преподавания математики	148
Об авторах	151

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Иной раз наступление одного случайного события изменяет (увеличивает или уменьшает) шансы происхождения другого. В таких случаях идёт речь о вероятности некоторого события, при условии, что другое событие уже произошло, т. е. об **условной вероятности**.

Пусть B – случайное событие, которое уже произошло, A – случайное событие, вероятность происхождения которого необходимо рассчитать, учитывая, что B – свершилось. Тогда $P(A|B)$ – вероятность происхождения события A , при условии, что событие B уже произошло (**условная вероятность**).

$P(A \cdot B)$ – вероятность одновременного наступления событий A и B .

Условная вероятность $P(A|B)$ (или $P_B(A)$) – это вероятность происхождения события A , при условии, что случайное событие B уже произошло:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} \quad \text{или} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}.$$

Условная вероятность $P(B|A)$ (или $P_A(B)$) – это вероятность происхождения события B , при условии, что случайное событие A уже произошло:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} \quad \text{или} \quad P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

Условную вероятность можно рассчитывать либо с использованием специальной формулы, либо без её использования.

Пример непосредственного подсчёта условной вероятности (без применения формулы условной вероятности)

Задача 1. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика написаны две единицы, две тройки и две пятёрки. Из двух кубиков наугад выбрали один и бросили его два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

Решение: изобразим всевозможные исходы подбрасывания описанных кубиков:

	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

	1	1	3	3	5	5
1	1-1	1-1	1-3	1-3	1-5	1-5
1	1-1	1-1	1-3	1-3	1-5	1-5
3	3-1	3-1	3-3	3-3	3-5	3-5
3	3-1	3-1	3-3	3-3	3-5	3-5
5	5-1	5-1	5-3	5-3	5-5	5-5
5	5-1	5-1	5-3	5-3	5-5	5-5

Так как событие «в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков» уже произошло, то рассматриваем только те исходы, которые учитывают его происхождения (остальные отсекаем):

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3					3–5	
4						
5			5–3			
6						

	1	1	3	3	5	5
1						
1						
3					3–5	3–5
3					3–5	3–5
5			5–3	5–3		
5			5–3	5–3		

Тогда общее число исходов испытания: 10, из них 8 получены в результате подкидывания второго кубика, а значит вероятность того, что бросали второй кубик можно определить по формуле: $p = \frac{8}{10} = 0,8$.

Ответ: 0,8.

Подсчёт условной вероятности с применением формулы

Обозначим события, о которых идёт речь в предыдущей задаче: пусть A – случайное событие «дважды был подкинут второй кубик»; B – случайное событие «выпали числа 3 и 5». Определить вероятность того, что дважды был подкинут второй кубик, если известно, что выпадали тройка и пятёрка, это значит найти *условную вероятность* $P(A|B)$, т. е. вероятность происхождения события A , при условии, что событие B уже произошло.

Имеем: $P(B) = \frac{2}{36} + \frac{8}{36} = \frac{10}{36}$ – вероятность выпадения *тройки* и *пятерки* на обоих кубиках; $P(AB) = \frac{8}{36}$ – вероятность выпадения *тройки* и *пятерки* на втором кубике, тогда: $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{8}{36} : \frac{10}{36} = 0,8$. Ответ: 0,8.

Преимущества задач теории вероятностей в том, что их можно решать разными способами и есть возможность выбирать наиболее удобный, понятный. Однако даже если первый (бесформульный) способ решения задачи 1 показался рациональным, не нужно «сбрасывать со счетов» формулу условной вероятности, так как существуют задачи, в которых без неё обойтись невозможно.

Задача 2. В ювелирном магазине продаются комплекты (кольцо и серьги), которые администрация разрешает продавать порознь. Статистика показывает, что 64 % покупателей покупают кольца, 55 % – серьги, а 92 % – или кольца, или серьги. Какова вероятность того, что:

- покупатель купит кольцо, если серьги он уже купил;
- покупатель купит серьги, если кольцо он уже купил?

Краткую запись таких задач лучше всего осуществлять с помощью диаграмм.

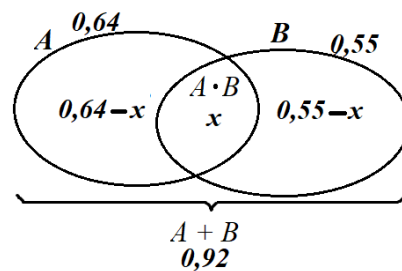
Решение:

A – СС «покупка кольца», $P(A) = 0,64$;

B – СС «покупка серёг», $P(B) = 0,55$.

Значит заданная вероятность того, что будут куплены или кольца, или серьги: $P(A + B) = 0,92$.

Пусть x – вероятность того, что будет куплен комплект (и кольцо, и серьги одновременно), тогда по данным диаграммы:



$$0,64 - x + x + 0,55 - x = 0,92 \Rightarrow x = 0,27 \Rightarrow P(A \cdot B) = 0,27.$$

а) вероятность того, что покупатель купит кольцо, если серьги он *уже* купил:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{0,27}{0,55} = \frac{27}{55}.$$

б) вероятность того, что покупатель купит серьги, если кольцо он *уже* купил:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{0,27}{0,64} = \frac{27}{64}.$$

Ответ: а) $\frac{27}{55}$; б) $\frac{27}{64}$.

Задача 3. В гимназии некоторые ученики 10-х классов углублённо изучают английский и математику. Вероятность того, что ученик углублённо изучает английский, при условии, что известно, что он углублённо изучает математику, равна 0,81; вероятность того, что ученик углублённо изучает математику, при условии, что известно, что он углублённо изучает английский, равна 0,72. Вероятность одновременного углублённого изучения обеих дисциплин сразу равна 0,09. Найти вероятность того, что ученик углублённо изучает:

а) английский язык;

б) либо математику, либо английский язык.

Решение: пусть A – СС «английский», $P(A) = ?$;

B – СС «математика», $P(B) = ?$;

$P(A|B) = 0,81$; $P(B|A) = 0,72$; $P(A \cdot B) = 0,09$.

а) Так как $P(B|A) = 0,72$ и $P(A \cdot B) = 0,09$, значит:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} \Rightarrow 0,72 = \frac{0,09}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{9}{72} = \frac{1}{8}.$$

б) Так как $P(A|B) = 0,81$ и $P(A \cdot B) = 0,09$, значит:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} \Rightarrow 0,81 = \frac{0,09}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{9}.$$

Значит вероятность того, что ученик углублённо изучает либо математику, либо английский язык (удобно начертить диаграммы):

$$P(A+B) = \left(\frac{1}{8} - 0,09\right) + 0,09 + \left(\frac{1}{9} - 0,09\right) = \frac{1}{8} + \frac{9}{100} + \frac{1}{9} = \frac{587}{1800}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{587}{1800}$.

Задача 4. Вероятность того, что гость на вечеринке любит арбузы, если известно, что он любит дыни равна $0,615$; вероятность того, что гость любит дыни, если он любит арбузы, равна $0,515$; вероятность того, что гость любит одновременно и арбузы, и дыни, равна $0,215$.

Найти вероятность того, что гость любит:

а) только арбузы;

б) либо арбузы, либо дыни.

Решение: пусть A – СС «арбузы», $P(A) = ?$;

B – СС «дыни», $P(B) = ?$;

$P(A \setminus B) = 0,615$; $P(B \setminus A) = 0,515$; $P(A \cdot B) = 0,215$.

а) Так как $P(B \setminus A) = 0,515$ и $P(A \cdot B) = 0,215$, значит:

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} \Rightarrow 0,515 = \frac{0,215}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{0,215}{0,515} = \frac{43}{103}.$$

б) Так как $P(A \setminus B) = 0,615$ и $P(A \cdot B) = 0,215$, значит:

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} \Rightarrow 0,615 = \frac{0,215}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{0,215}{0,615} = \frac{43}{123}.$$

Значит вероятность того, что гость любит либо арбузы, либо дыни (наглядно это видно с помощью диаграмм):

$$P(A+B) = \left(\frac{43}{103} - 0,215\right) + 0,215 + \left(\frac{43}{123} - 0,215\right) = \frac{1398833}{2533800} \approx 0,5521.$$

Ответ: $\approx 0,5521$.

Задача 5. Вероятность того, что в библиотеке в разделе «Книги о природе» случайно выбранная книга содержит рассказ о море равна $0,325$; содержит рассказ о тайге – $0,485$; вероятность того, что в книге будет рассказ или о море, или о тайге – $0,925$.

Найти вероятность того, что случайно выбранная книга содержит:

а) содержит рассказы и о море, и о тайге;

б) рассказ о море, если она содержит рассказ о тайге.

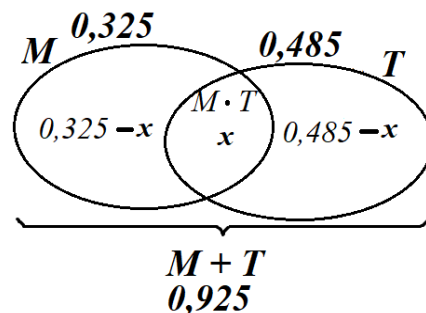
Решение:

пусть M – СС «о море», $P(M) = 0,325$;

T – СС «о тайге», $P(T) = 0,485$;

$P(M+T) = 0,925$.

а) Пусть $P(M \cdot T) = x$ (см. рис.):



$$(0,325 - x) + x + (0,485 - x) = 0,925 \Rightarrow x = 0,115.$$

б) Определим $P(M|T)$:

$$P(M|T) = \frac{P(M \cdot T)}{P(T)} = \frac{0,115}{0,485} = \frac{115}{485} = \frac{23}{97}.$$

Ответ: а) $0,115$; б) $\frac{23}{97}$.

Задача 6. Вероятность того, что восьмиклассник пойдет на олимпиаду по географии равна $0,365$; по праву – $0,55$; вероятность того, что он будет участником обеих олимпиад $0,225$. Найти вероятность того, что ученик будет участвовать:

- а) в олимпиаде по географии, если уже участвовал в олимпиаде по праву;
 б) в олимпиаде по праву, если уже участвовал в олимпиаде по географии;
 в) или в одной, или в другой олимпиаде.

Решение: пусть A – СС «по географии», $P(A) = 0,365$;

B – СС «по праву», $P(B) = 0,55$;

$P(A \cdot B) = 0,225$.

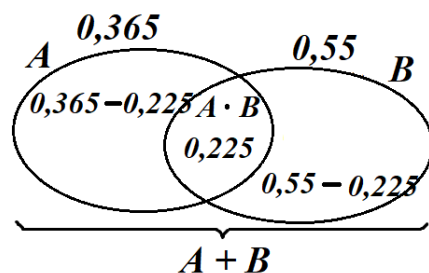
а) Найдём $P(A|B)$: $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{0,225}{0,55} = \frac{225}{550} = \frac{9}{22}$.

б) Найдём $P(B|A)$:
 $P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{0,225}{0,365} = \frac{45}{73}$.

в) Определим $P(A + B)$:

$$(0,365 - 0,225) + 0,225 + (0,55 - 0,225) = 0,69.$$

Ответ: а) $\frac{9}{22}$; б) $\frac{45}{73}$; в) $0,69$.



Задача 7. Вероятность взять с подноса пирожок с капустой равна $0,8$, пирожок с мясом – $0,6$, пирожок с капустой и мясом – $0,1$. Гость наугад выбирает пирожок, какова вероятность того, что он угостится:

а) пирожком с капустой, но без мяса;

б) пирожком с капустой, при условии, что хозяйка уже предупредила, что он с мясом;

в) пирожком с капустой, если хозяйка уже предупредила, что он без мяса.

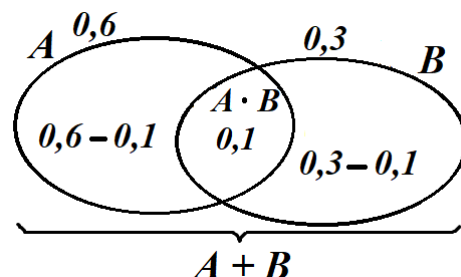
Решение:

пусть A – СС «с мясом», $P(A) = 0,6$;

B – СС «с капустой», $P(B) = 0,3$;

$P(A \cdot B) = 0,1$.

а) Вероятность того, что пирожок с капустой, но без мяса: $p = 0,3 - 0,1 = 0,2$



Комментарий: п. а) нет события, которое уже произошло, поэтому не нужно просчитывать $P(B|\bar{A})$, эта запись читается: вероятность события B , при условии, что событие $\bar{A}$ уже произошло.

б) Найдём $P(B|A)$:
$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6}.$$

в) Определим $P(A|B)$:
$$P(A|B) = \frac{P(\bar{A} \cdot B)}{P(\bar{A})} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5.$$

Ответ: а) 0,2; б) $\frac{1}{6}$; в) 0,5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артемьева С. В., Курьякова Т. С. О формировании одной из специальных профильных компетенций на занятиях дисциплины «Теория вероятностей» при обучении бакалавров – будущих учителей математики // Современное состояние и перспективы развития психологии и педагогики : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф. Уфа, 2014. С. 16–20.
2. Артемьева С. В., Курьякова Т. С. Элементы комбинаторики и теории вероятностей: Практикум по решению задач. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2008. 125 с.
3. Бунимович Е. А. Математика. Вероятность и статистика. 10-й класс: базовый и углублённый уровни : учеб. пособие. М. : Просвещение, 2023. 223 с.
4. Высоцкий И., Шапарина В. Об условной вероятности в школе // Математика. 2021. URL: <https://ptlab.mcsme.ru/node/165>
5. Высоцкий И. Р., Ященко И. В. Математика. Универсальный многоуровневый сборник задач 7–9 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций. В 3 ч. Ч. 3. Статистика. Вероятность. Комбинаторика. Практические задачи. М. : Просвещение, 2020. 240 с.
6. Мерзляк А. Г., Новомирский Д. А., Поляков В. М. Математика. Алгебра и начала математического анализа. 11-й класс: углублённый уровень : учеб. пособие. М. : Вентана-Граф, 2019. 413 с.

ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ СТЕПЕННО-ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Степенно-показательные, или, как их ещё называют, *показательно-степенные* уравнения – это уравнения, в которых переменная содержится как в показателе, так и в основании степени. Они чаще имеют вид:

$$(\varphi_1(x))^{g_1(x)} = (\varphi_2(x))^{g_2(x)},$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ – функции от переменной x .

Определённый интерес представляют системы степенно-показательных уравнений, содержащие два или более степенно-показательных уравнения, включающие две или более переменные. Чтобы успешно с ними справиться, требуется владеть нюансами решения показательных, логарифмических, степенно-показательных уравнений.

Фактически этот класс заданий школьного курса алгебры позволяет систематизировать и обобщать весь ранее изученный материал: от свойств степеней и логарифмов до специальных учебных приёмов. Поэтому с помощью подобных заданий можно осуществлять дифференцированный подход к организации процесса обучения.

Основными *приёмами* и *методами* решения *степенно-показательных уравнений* являются: уравнивание показателей, логарифмирование обеих частей уравнения, рационализации.

Для решения *систем степенно-показательных уравнений* осуществляют:

- замену выражений в одной или нескольких строчках системы;
- логарифмирование одного или нескольких уравнений/неравенств;
- выражение одной переменной через другую и пр.

Продemonстрируем на примерах (1) и (2) реализацию приёма логарифмирования, суть которого сводится к логарифмированию обеих частей одного или нескольких уравнений системы по наиболее удобному основанию. Желательно в качестве основания логарифма выбирать конкретное положительное, не равное единице число, чтобы не спровоцировать сужение области допустимых значений переменной.

Пример 1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^{2y^2-9y+9} = 8 \\ x^{y^2-5y+6} = 4 \end{cases}, \quad x > 0.$$

Решение: прологарифмируем оба уравнения по основанию 2:

$$\begin{cases} \log_2 x^{2y^2-9y+9} = \log_2 8 \\ \log_2 x^{y^2-5y+6} = \log_2 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2y^2-9y+9)\log_2 x = 3 \\ (y^2-5y+6)\log_2 x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{3}{2y^2-9y+9} \\ \log_2 x = \frac{2}{y^2-5y+6} \end{cases} \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2y^2 - 9y + 9} = \frac{2}{y^2 - 5y + 6} \Rightarrow 3(y^2 - 5y + 6) = 2(2y^2 - 9y + 9) \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Если } y = 0, \text{ то: } \begin{cases} y = 0 \\ \log_2 x = \frac{2}{y^2 - 5y + 6} \end{cases} \Rightarrow \log_2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2};$$

$$\text{если } y = 3, \text{ то: } \begin{cases} y = 3 \\ \log_2 x = \frac{2}{y^2 - 5y + 6} \end{cases} \Rightarrow \text{система не имеет решений. Ответ: } (\sqrt[3]{2}; 0).$$

Пример 2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^{\log_y x} \cdot y = x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y \cdot \log_y (y - 3x) = 1 \end{cases}.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ y > 3x \end{cases}.$$

Решение: прологарифмируем обе части первого уравнения по основанию y (это не приведёт к сужению ОДЗ, так как уже известно, что $y > 0$ и $y \neq 1$), а во втором уравнении воспользуемся свойством произведения логарифмов:

$$\begin{cases} \log_y (x^{\log_y x} \cdot y) = \log_y x^{\frac{5}{2}} \\ \log_y y \cdot \log_4 (y - 3x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_y x^{\log_y x} + 1 = \frac{5}{2} \log_y x \\ y - 3x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \log_y^2 x - 5 \log_y x + 2 = 0 \\ y - 3x = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_y x = 2 \\ \log_y x = \frac{1}{2} \\ y - 3x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y - 3x = 4 \\ x = \sqrt{y} \\ y - 3x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y - 3y^2 = 4 \\ x = \sqrt{y} \\ y - 3\sqrt{y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ 3y^2 - y + 4 = 0 \\ x = \sqrt{y} \\ \sqrt{y}^2 - 3\sqrt{y} - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Так как в первой системе полученной совокупности решений нет, то рассмотрение подлежит только вторая система:

$$\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ \sqrt{y} = -1 < 0 \\ \sqrt{y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ \sqrt{y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 16 \end{cases}.$$

Заметим, что полученные значения переменных удовлетворяют ОДЗ, в частности, требованию неравенства $y > 3x$.

Ответ: $(4; 16)$.

В следующих двух примерах продемонстрируем применение приёма уравнивания показателей степеней.

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} y^{x^2+7x+12} = 1, & y > 0. \\ x + y = 6 \end{cases}$

Решение: уравниваем показатели в первом уравнении системы:

$$y^{x^2+7x+12} = 1 \Rightarrow y^{x^2+7x+12} = y^0.$$

Решение уравнения сводится к рассмотрению двух случаев:

$$\text{– если } y = 1, \text{ то } \begin{cases} 1^{x^2+7x+12} = 1 \\ x + 1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^{12} = 1 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow (5; 1);$$

$$\text{– если } x^2 + 7x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3 \\ y = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = 10 \end{cases} \end{cases}.$$

Ответ: $(5; 1); (-4; 10); (-3; 9).$

Пример 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}.$$

Решение: с учётом ограничений ОДЗ проведём ряд преобразований уравнений исходной системы:

$$\begin{cases} y = x^{\frac{x+y}{12}} \\ y = x^{\frac{3}{x+y}} \end{cases} \Rightarrow x^{\frac{x+y}{12}} = x^{\frac{3}{x+y}}.$$

Решение уравнения $x^{\frac{x+y}{12}} = x^{\frac{3}{x+y}}$ сводится к анализу двух случаев:

– если $x = 1$, то $y = 1$;

$$\begin{aligned} \text{– если } \frac{x+y}{12} = \frac{3}{x+y} &\Rightarrow (x+y)^2 = 6^2 \Rightarrow \begin{cases} x+y = 6 \\ x+y = -6 \notin \text{ОДЗ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 6 \\ y = x^{\frac{x+y}{12}} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x+y = 6 \\ y = x^{\frac{1}{2}} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}^2 + \sqrt{x} - 6 = 0 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ответ: $(1; 1); (4; 2).$

Решение систем степенно-показательных уравнений содействует закреплению и совершенствованию навыков обучающихся всего содержания школьного курса математики. Эта тема представляет интерес для изучения в профильных классах (в том числе в ходе проведения учебных исследований учеников) и при изучении содержания элементарной математики в педагогических вузах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артемьева С. В., Курьякова Т. С., Мухина К. А. Приёмы решения степенно-показательных уравнений и неравенств // Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании : материалы XV Всерос. науч.-практ. конф. / под общ. ред. З. А. Дулатовой. Иркутск : Изд-во ИГУ. 2022. С. 48–54.
2. Пратусевич М. Я., Столбов К. М., Головин А. Н. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений : проф. уровень. М. : Просвещение, 2009. 415 с.
3. Далингер В. А. Всё о логарифмических уравнениях, неравенствах и их системах : учеб. пособие. Омск : ОмГПУ, 2008 // Лань : электронно-библиотечная система. URL: <https://e.lanbook.com/book/143232> (дата обращения: 28.02.2024). Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Рисберг В. Г., Черникова И. Ю. Решение показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем уравнений повышенного и высокого уровня сложности. Ч. 2 : учеб. пособие. Пермь : Пушка, 2015. 64 с.

МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОСТРОЕНИЙ

Успешное решение геометрических задач, как правило, становится свидетельством серьёзной подготовки школьника, его заинтересованности в получении математического образования. Тем более, если обучающийся владеет специальными приёмами, рационализирующими процесс решения. К таким приёмам относятся, в том числе, приёмы метода дополнительных построений, позволяющие вносить разумное разнообразие в геометрические рассуждения. Существует целый класс задач школьного курса планиметрии, к которым традиционные методы решения либо не применимы, либо сильно усложняют решения.

Метод дополнительных построений при решении геометрических задач простым не назовёшь, так как нужное дополнительное построение не всегда удастся определить с первого взгляда, а признаки распознавания ситуации применения того или иного приёма сформулировать не всегда удаётся. Но, применяя различные приемы метода дополнительных построений, удаётся сделать решение геометрической задачи значительно проще. Иногда условие задачи или грамотно построенный чертеж подсказывает выбор дополнительного построения. Дополнительные линии чаще всего проводятся для того, чтобы свести задачу к ранее решенной или просто более простой задаче. Они позволяют включить в задачу новые фигуры с их свойствами, тем самым увеличить число теорем, которые можно использовать при решении задачи.

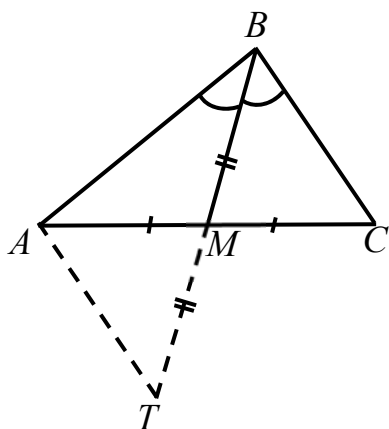
Метод дополнительных построений является достаточно мощным методом решения как стандартных, так и олимпиадных задач и задач ОГЭ/ЕГЭ. Вместе с тем существуют достаточно типичные дополнительные построения, к выполнению которых обучающихся можно подготовить, ведь дополнительные построения встречаются по всему курсу планиметрии с 7-го по 9-й классы.

Прием удвоения медианы треугольника

Уже с семиклассниками можно реализовывать такой приём метода дополнительных построений, как «удвоение медианы». Вследствие чего ученик может задаться вопросом «А как до этого можно было догадаться?».

Проведение дополнительного построения «удвоение медианы треугольника» в заданиях по геометрии распознаётся по следующим признакам: в условии задачи заданы медиана и связанные с ней углы треугольников. Продемонстрируем на примерах.

Задача 1. Медиана треугольника совпадает с его биссектрисой. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.



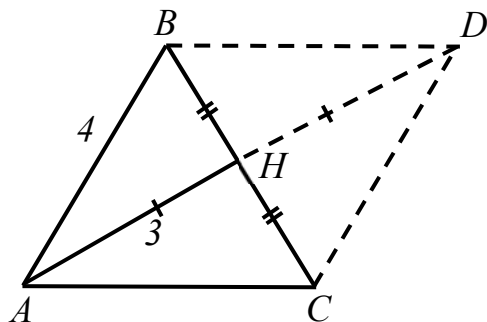
Дополнительное построение: продлим прямую BM за точку M и отложим на ней отрезок MT так, что $MT = BM$.

Доказательство: 1) $\triangle AMT = \triangle CMB$ (по первому признаку равенства треугольников) $\Rightarrow AT = BC$ и $\angle ATM = \angle CBM = \angle MBA$.

2) В $\triangle ABT$: $\angle ATM = \angle MBA \Rightarrow \triangle ABT$ – равнобедренный, а значит $AT = AB$.

3) $AT = BC$, $AT = AB \Rightarrow AT = BC = AB \Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный. Ч. т. д

Следующую задачу на реализацию приёма удвоения медианы треугольника можно предложить 8-микласнику.



Задача 2. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, проведена медиана к боковой стороне. Найдите основание треугольника, если медиана равна 3.

Пусть в $\triangle ABC$: $AB = BC = 4$, $AH = 3$, где AH – медиана, проведённая к боковой стороне.

Дополнительное построение: удвоим медиану AH , тогда $AH = HD = 3$.

Решение: так как в четырёхугольнике $ABDC$ диагонали точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow ABDC$ – параллелограмм.

По свойству о сумме квадратов диагоналей параллелограмма:

$$BC^2 + AD^2 = 2(AB^2 + AC^2) \Rightarrow 4^2 + 6^2 = 2(4^2 + AC^2) \Rightarrow AC = \sqrt{10}.$$

Ответ: $AC = \sqrt{10}$.

Наряду с формированием у обучающихся навыков применения приёма удвоения медианы треугольника можно вводить навык реализации приёма «спрямления» отрезков.

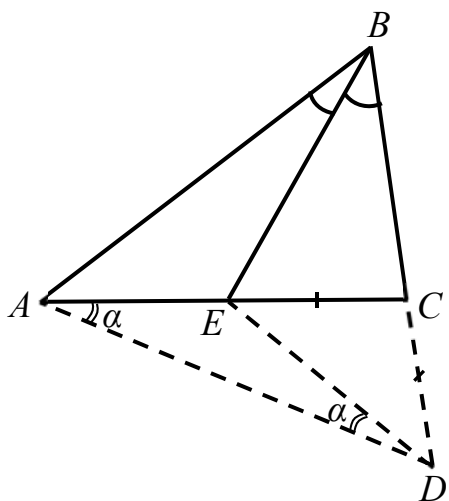
Прием «спрямления» отрезков

Этот приём распознаётся по следующим признакам:

- если в условии задачи задана сумма или разность отрезков;
- если в условии задачи задано соотношение углов, которое удачно рассматривать, если достроить развёрнутый угол.

Продemonстрируем на примерах.

Задача 3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BE . Докажите, что если $BC + CE = AB$, то $\angle C = 2\angle A$.



Дополнительное построение: отложим на продолжении стороны BC , за точку C , отрезок CD , равный отрезку CE .

Доказательство: если $BC + CE = AB$ и $CD = CE$, значит $AB = DB$.

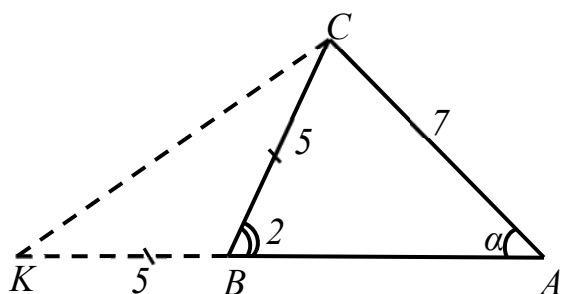
$\triangle ABE = \triangle BED$ (по первому признаку равенства треугольников) $\Rightarrow AE = ED$ и $\triangle AED$ – равнобедренный: $\angle EAD = \angle EDA = \alpha$. Тогда $\angle CED = 2\alpha$ – как внешний угол $\triangle AED$.

Так как $\triangle ECD$ – равнобедренный, то $\angle CED = \angle CDE = 2\alpha \Rightarrow \angle BAE = \angle CDE = 2\alpha$.

При этом $\angle BCE = 2\alpha + 2\alpha = 4\alpha$ – как внешний угол $\triangle CED$.

Следовательно, так как $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle BCE = 4\alpha$, значит $\angle C = 2\angle A$. Ч. т. д.

Задача 4. В треугольнике ABC : $\angle B = 2\angle A$, $BC = 5$, $AC = 7$. Найти длину стороны AB .



Дополнительное построение: на продолжении прямой AB за точку B отложим отрезок BK , равный отрезку BC .

Решение: $\triangle CBK$ – равнобедренный: $CB = BK = 5$, при этом $\angle CBK = 180^\circ - 2\alpha$ – как смежный с $\angle CBA$, значит $\angle KCB = \angle CKB = \alpha$.

$\triangle KCA$ – равнобедренный, так как $\angle CKB = \angle CAK = \alpha$, значит $KC = CA = 7$.

$\triangle KCA = \triangle CBK$ подобны по двум углам, значит:

$$\frac{CA}{BK} = \frac{KA}{CK} \Rightarrow \frac{7}{5} = \frac{AB + 5}{7} \Rightarrow AB = 4,8$$

Ответ: $AB = 4,8$.

Кроме приёмов удвоения медианы треугольника и «спрямления» отрезков, в методе дополнительных построений реализуют:

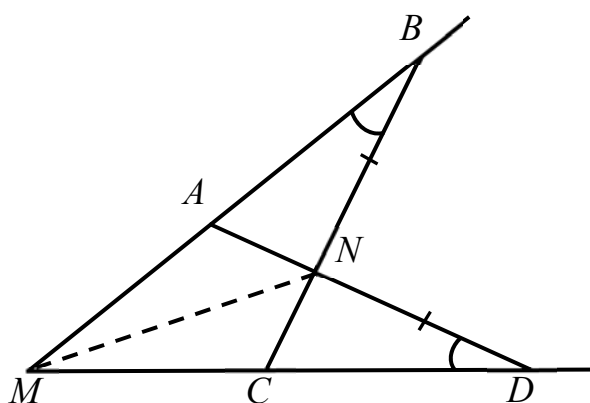
- приём продления доковых сторон трапеции до пересечения;
- приём параллельного переноса одной из диагоналей трапеции;
- приём построения вспомогательной окружности;
- приём поведения параллельных линий с целью построения подобных (равных) треугольников;
- приём проведения параллельных отрезков с целью применения теоремы Фалеса;

– другие произвольные дополнительные построения, например, если в условии задачи заданы углы и соотношения между отрезками.

Произвольные дополнительные построения

Иной раз произвольные дополнительные построения ограничиваются проведением одной лишь очевидной линии. Продемонстрируем на примере.

Задача 5. На одной стороне угла с вершиной M отмечены точки A и B , а на другой стороне – точки C и D . Отрезки AD и BC пересекаются в точке N , $BN = DN$



и $\angle MBC = \angle MDA$. Докажите, что точка N лежит на биссектрисе угла M .

Дополнительное построение: проведем отрезок MN .

Доказательство: $\triangle ANB = \triangle CND$ (по второму признаку) $\Rightarrow AN = CN$ и $\angle BAN = \angle DCN$. Тогда $AD = BC$ и $\angle MAD = \angle MCB$ (углы, смежные с равными).

Значит, $\triangle MAD = \triangle MCB$ (по второму признаку: $AD = BC$, $\angle MBC = \angle MDA$, $\angle MAD = \angle MCD$) $\Rightarrow MA = MC$.

Тогда $\triangle MAN = \triangle MCN$ (по третьему признаку: MN – общая, $AN = CN$, $MA = MC$) $\Rightarrow \angle AMN = \angle CMN \Rightarrow N \in$ биссектрисе угла M . Ч. т. д.

Решение задач с помощью дополнительных построений становится не только проще, но и намного интересней, чем решение привычными способами. Реализация приёмов метода дополнительных построений содействует углублению знаний, развитию изобретательности, геометрической интуиции, геометрического кругозора обучающихся.

Приобретение навыков решения геометрических задач различными методами положительно влияет на развитие логического мышления, геометрической интуиции и смекалки при решении различного рода задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курьякова Т. С., Артемьева С. В., Бычкова О. И. Методы решения задач планиметрии : учеб. пособие. Иркутск : Репроцентр А1, 2019. 96 с.
2. Бежану Т. В. Методика формирования умения решать задачи с помощью дополнительных построений в курсе геометрии 7–9 классов // Вопросы педагогики. 2019. № 8–2. С. 12–16
3. Блинков А. Д. Геометрия для 7 класса, обычная и не очень. В 2 ч. Ч. 1. М. : МЦНМО, 2021. 144 с.
4. Дурова Е. М., Капленко Э. Ф. Метод дополнительных построений при решении планиметрических задач. Воронеж, 1995. 16 с.
5. Прасолов В. В. Геометрия. Решение задач повышенной сложности по геометрии. 7–9 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций. М. : Просвещение, 2019. 239 с.

ФИНАНСОВЫЕ ЗАДАЧИ НА УРОКАХ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ В 7-М И 10-М КЛАССАХ

В связи с введением в школьную программу предмета «Вероятность и статистика» возникла огромная потребность в задачах для закрепления изученного материала. Мы решили составить задачи с использованием финансовой терминологии.

Задачи для 7-го класса

Задача 1. Матроскин решил построить еще один коровник. Для постройки сооружения ему необходимо 252 340 монет. Он решил взять кредит. Вблизи Простоквашино есть 6 банков, все они дают кредит под следующий годовой процент:

Почта Печкина – 5 %

Колхоз банк – 7 %

Страх банк – 13 %

Премиум банк – 7 %

Столичный банк – 12 %

Простокашино банк – 11 %

Матроскин планирует взять кредит на 1 год и выплачивать каждый месяц одну и ту же сумму.

Найдите:

1) В каком банке наименьший годовой процент;

2) Моду;

3) Размах;

4) Медиану;

5) Рассчитайте, какую сумму Матроскин выплатит банку «Почта Печкина» через год? И сколько он будет выплачивать каждый месяц?

Ответ: Почта Печкина – 5 %; 2) 7; 3) 8; 4) 9; 5) 264957 монет, 22079,75 монет

Задача 2. Сидя вечером перед окном, кот Матроскин понял, что он может экономить на электроэнергии. Для этого он попросил Шарика после каждого рабочего дня записывать данные о том, сколько электроэнергии было потрачено в день. У Шарика получились следующие данные:

150; 100; 110; 100; 103; 102;

101; 115; 160; 100; 104; 103;

102; 108; 100; 101; 102; 164;

109; 100; 101; 150; 102; 105;

108; 113; 115; 100; 107; 105.

Для того чтобы увидеть результаты наблюдения, Матроскин применил статистические методы. Ему нужна помощь.

Помогите Матроскину найти:

- 1) среднее значение;
- 2) медиану, моду;
- 3) размах;
- 4) наименьшее значение, наибольшее значение;

Заполните таблицу частот

Квт.	100	101	102	103	104	105	107	108	109	113	115	150	160	164
Абсолютная частота	6													

Постройте гистограмму частот.

Сделайте вывод.

Ответы: 1) 111; 2) медиана = 103; 3) 6; 4) наименьшее значение – 100, наибольшее значение – 164.

Задача 3. Матроскину сделали заказ из города Цветочный на 500 литров молока (1 бутылка молока стоит 94 монеты). Матроскин рассчитывает кратчайший путь, чтобы сэкономить на дороге (10 литров бензина стоит 539 монет, по проселочной дороге он потратит их на 83 км, по шоссе – на 97 км)

Помогите Матроскину найти выгодный путь, если из Простоквашино по проселочной дороге можно доехать до Простокашино (10 км), из Простокашино по шоссе до Цветочного (3 км), из Простокашино по шоссе до Малиновки (7 км), из Малиновки по проселочной до Строгонова (2,5 км), из Строгонова по проселочной до Цветочного (4 км), из Простокашино по проселочной до Творогово (3,2 км), из Творогова по шоссе до Цветочного (1,3 км).

Составьте граф. Какой путь будет выгоднее для Матроскина? И сколько денег он заработает на продаже молока?

Ответ: 700,7

Задача 4. Ваня хочет сделать подарок маме на 8 марта. Для этого он выбирает на чем можно экономить. Просмотрев свои затраты, он решил экономить на обедах в столовой. Для этого он анализирует свои затраты в течение месяца. (24 дней)

120; 115; 113; 120; 121;
116; 106; 107; 108; 110;
116; 120; 113; 121; 125;
120; 113; 120; 113; 108;
116; 107; 113; 125.

Найдите:

- 1) Какую наибольшую сумму он потратил на обеды
- 2) Какую наименьшую сумму он потратил
- 3) Размах
- 4) Медиана
- 5) Среднее значение

Заполните таблицу

Затраты	106	107	108	110	113	115	116	120	121	125
Абсолютная частота										

Постройте гистограмму

Ответы: 1) 125; 2) 107; 3) 18; 4) 115,25

Задача 5. Матроскин рассчитывает семейный бюджет, так как заметил, что он не может откладывать на благоустройство фермы. Для этого он составил таблицу, в которую вносил расходы.

Еда	Одежда	Развлечения	Коммунальные платежи	Дрова	Другое
1230	17500	12 500	3125	1500	1250

Постройте круговую диаграмму расходов. Расходы по каким статьям можно сократить Матроскину, чтобы начать откладывать на благоустройство фермы. Сокращать можно расходы, выражающиеся пятизначным числом.

Ответ: Нужно сократить затраты на одежду и развлечения.

Задачи для 10-го класса

Задача 6. Иван Иванович получил в наследство капитал. И решил вложить его в акции трёх предприятий, разделив его поровну. Но друг посоветовал ему часть денег положить на вклад. Тогда Иван Иванович решил положить на вклад $\frac{1}{4}$ от суммы на акции для первого предприятия, $\frac{1}{3}$ от суммы для второго предприятия и $\frac{1}{2}$ – от суммы для третьего предприятия. Какую часть от первоначального капитала Иван Иванович положил на вклад?

Ответ: $\frac{13}{36}$

Задача 7. Иван Иванович решил вложить 100 тыс. руб. в облигации двух предприятий поровну. Купонная доходность первой облигации – 20 %, а второй – 14 %. Через год он продал облигации и положил все средства на вклад под 12 % годовых сроком на 3 месяца. По истечению срока вклада переложил все средства в облигации трех видов с купонным доходом: государственные – 12 % годовых, муниципальные – 14 % годовых и корпоративные – 16 % годовых сроком на 1 год. Какую прибыль получит Иван Иванович в конце этого года?

Ответ: 37381,4 руб. прибыль.

Задача 8. Решите с помощью дерева возможных вариантов:

Иван выбирает акции какого вида приобрести. На 10 акций, продаваемых на рынке 8 являются акциями роста. Найдите вероятность, что Иван получит прибыль, если акции роста начнут выплачивать дивиденды с вероятностью 0,3, а дивидендные акции – с вероятностью 0,9?

Ответ: 0,42

Задача 9. Было выпущено 1000 лотерейных билетов, из которых 25 выигрышных. Иван и Василий один за другим берут по билету. Какова вероятность, что выигрышным будет первый билет, второй билет?

А – первый билет выигрышный

В – второй билет выигрышный

$$P(A) = 0,025$$

$$P(B/A) = \frac{24}{999} \approx 0,024, P(B/\bar{A}) = \frac{25}{999} \approx 0,025.$$

Задача 10. На бирже представлены акции трёх предприятий. При этом 20 % от всех представленных акций – акции первой компании, 30 % – второй, а 50 % – третьей. Процент выплат дивидендов для каждого предприятия соответственно 60, 70 и 80 %. Какова вероятность получить дивиденды по случайно выбранной акции?

Ответ: 0,73.

РОЛЬ ЗАДАЧ В ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Всем известно, что математика – это часть человеческой культуры, ключ к познанию мира, база научно-технического прогресса. Кроме этого, математика способствует формированию личности.

К основной задаче обучения математике в школе относятся обеспечение математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и в дальнейшей профессиональной деятельности. И для реализации этой задачи огромную роль играет учебный предмет «Геометрия».

«Школьная геометрия – это не только аксиомы и теоремы, изложенные в учебнике. Школьная геометрия – это также искусство решать геометрические задачи» [4]. На уроках геометрии учатся мыслить, анализировать, обобщать, сравнивать, конкретизировать. Поэтому для учеников геометрия – сложный предмет. На начальных этапах изучения ученик сталкивается с обширной информацией, новыми понятиями, терминами, символикой.

И как показывает опыт, школьные учителя математики при преподавании сталкиваются с тем, что ученики в большинстве не могут применить изученный теоретический материал к решению задач.

Как преодолеть эти проблемы? Над этим вопросом задумывается каждый учитель математики. В этой статье мы поделимся опытом своей работы.

Для качественного усвоения теории учащимися используем разные виды деятельности на уроке, но самое главное – это решение задач. Особое внимание уделяем решению опорных задач, решая которые, ученик знакомится с дополнительными геометрическими методами или фактами и применяет их при решении других задач. Например, при изучении темы «Площадь многоугольника» рассматриваем задачу: «Сравните площади двух треугольников, на которые разделяется данный треугольник его медианой». Решив ее, ученики приходят к опорной задаче: «Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника». Ученикам предлагается провести исследование: что получится, если в треугольнике провести три медианы. После поиска решения ученики приходят к выводу:

- а) Медианы треугольника делят его на три равновеликих треугольника.
- б) Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольника.

Применяя подобия треугольников к доказательству теорем и решению задач, разбираем свойства медиан и биссектрис, которые впоследствии применяем как опорные задачи.

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 к 1.

2. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Используя эти свойства, можно рассмотреть следующие задачи:

- а) По известным сторонам треугольника найти длины медиан.

- б) Вычислить площадь треугольника ABC, если его медианы равны 5, 6 и 5.

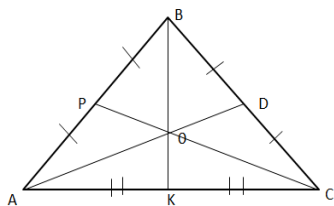


Рис. 1

Решение:

Пусть AD, CP, BK – медианы и $AD = CP = 5$, $BK = 6$. ABC – равнобедренный $AO = OC = \frac{2}{3}AD = \frac{10}{3}$,

$$OK = \frac{1}{3}BK = 2. \quad KC = \sqrt{\frac{100}{9} - 4} = \frac{8}{3}. \quad S_{\text{окс}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3}.$$

Зная, что медианы, пересекаясь, делят треугольник на шесть равновеликих, получим:

$$S_{ABC} = \frac{8}{3} \cdot 6 = 16.$$

- в) Биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу на отрезки 3 и 4. Найдите площадь треугольника.

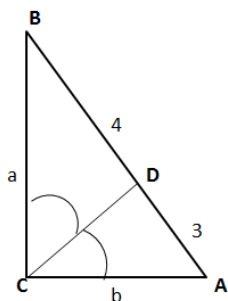


Рис. 2

Решение. Пусть $AC = b$, $BC = a$. Используя свойство биссектрисы, получаем $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$, а по теореме Пифагора

$a^2 + b^2 = 49$. Выразив, одну переменную из первого равенства и подставив ее во второе равенство, получим:

$$a = \frac{28}{5}, \quad b = \frac{21}{5}. \quad \text{Применяя формулу площади треугольника}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b, \quad \text{получим } S = 11,76.$$

При изучении темы «Площадь трапеции» ученикам была предложена задача, которая вызвала затруднения в решении.

Задача 1. Найти площадь равнобедренной трапеции с высотой равной 5 см, если ее диагонали взаимно перпендикулярны.

Возникла необходимость рассмотрения следующей опорной задачи:

Задача 2. Доказать, что если диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, то ее высота равна средней линии.

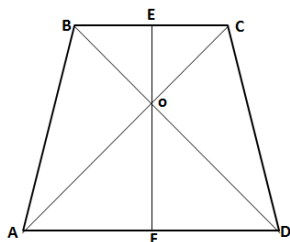


Рис. 3

Решение: Точка O – точка пересечения диагоналей. По условию AC перпендикулярен BD. Через точку O проведем высоту трапеции EF. Тогда OF – высота и медиана равнобедренного прямоугольного треугольника AOD и, значит, $OF = AF = \frac{1}{2}AD$. Аналогично, $OE =$

$$\frac{1}{2}BC. \quad \text{Таким образом, } EF = OF + OE = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Возвращаясь к задаче 1, получаем дополнительный геометрический факт: площадь равнобедренной трапеции, у которой диагонали взаимно перпендикулярны и высота равна h равна h^2 , т. е. $S_{\text{тр.}} = h^2$.

Решение следующей задачи включает в себя повторение курса геометрии за 7-й класс. Такие задачи имеют огромную ценность, так как развивают правильную математическую речь, учат детей строить цепочку логических рассуждений и связывают теорию с практикой.

Задача 3. Прямая m пересекает параллельные прямые n и p в точках A и D соответственно. Из точки C , принадлежащей прямой p (C не совпадает с D), проведена прямая, которая проходит через точку O , середину AD и пересекает прямую n в точке B . В треугольнике BAO углы относятся как 1:2:3 соответственно. Найти величины углов треугольника COD и длины отрезков OD и DC , если отрезок BA равен 14.

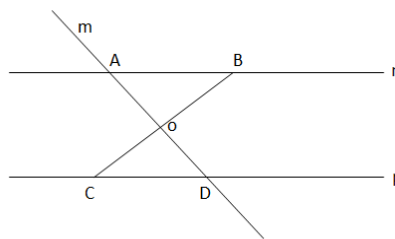


Рис. 4

При решении данной задачи учащиеся повторяют следующие темы:

1. Построение середины отрезка с помощью циркуля и линейки;
2. Сумма углов треугольника;
3. Вертикальные углы;
4. Свойства параллельных прямых;
5. Признаки равенства треугольников;
6. Свойство прямоугольного треугольника.

Наш опыт применения решения опорных задач и задач, включающих в себя повторение многих тем курса геометрии, дает положительные результаты. Такие задачи стимулируют учащихся к активной деятельности, помогают им глубже включаться в процесс познания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Геометрия : 7–9 классы : учебник / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. 13-е изд. М. : Просвещение, 2023. 383 с.
2. Потоскуев Е. В. ЕГЭ 2019. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия. М. : Экзамен, 2019.
3. Осипенко Л. А., Стацевичуте Е. Э. Опорные задачи планиметрии : метод. пособие. Иркутск, 2010.
4. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач : учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. М. : Просвещение, 1989. 252 с.

«ПОСМОТРИМ НА МАЛЕНЬКИХ»: МАСШТАБИРОВАНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Для человека, хоть сколько-нибудь знакомого с комбинаторикой, очевидно, что невозможно научиться решать комбинаторные задачи, руководствуясь одними лишь правилами и формулами. Нужно понимать суть задачи, уметь правильно организовать подсчёт.

Иногда для того, чтобы понять, как лучше это сделать, бывает полезно «уменьшить» задачу до того момента, когда становится возможным найти количество способов перебором, а затем вернуться к исходной задаче.

Рассмотрим теперь иллюстрацию этого подхода на примере нескольких задач разного уровня сложности.

Задача 1. Квадрат 2×2 можно разрезать на маленький квадратик и уголок четырьмя способами. Все способы разрезания показаны на рис. 1. Сколько существует способов разрезать квадрат 4×4 на три уголка и маленький квадратик, изображённые на рисунке? (Способы, отличающиеся поворотом или переворотом квадрата, считаются различными.)

Комментарий. В этой задаче знание правил суммы и произведения учащимся не помогает. Попытка нарисовать все возможные варианты тоже часто заканчивается неудачей – вариантов слишком много.

Однако, если начать рассматривать не исходную задачу, а серию однотипных задач, где в качестве параметра выступает размер квадрата, то решение становится очевидным.

Решение. Рассмотрим квадрат 2×2 . Как показано на рисунке, здесь 4 варианта. Размещая уголок «вершиной» в один из 4 углов квадрата, для размещения клетки остаётся единственный вариант.

Рассмотрим теперь квадрат 3×3 . Сначала разместим самый большой уголок. Для него, как и в предыдущей задаче, есть 4 варианта размещения. Заметим, что при каждом способе размещения у нас остается квадрат 2×2 , который нужно заполнить уголком и клеткой, а это предыдущая задача. Таким образом, для каждого варианта размещения большого уголка имеется 4 варианта размещения уголка и клетки в меньшем квадрате. Итого $4 \cdot 4 = 16$ вариантов.

Следующий квадрат – 4×4 . Поступим так же. Есть 4 способа разместить самый большой уголок, для каждого из которых получаем предыдущую задачу. Итого $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ варианта.

Возможные ошибки. Частая ошибка – делать неверные выводы на маленьком объеме данных. Многие учащиеся, нарисовав или увидев варианты для

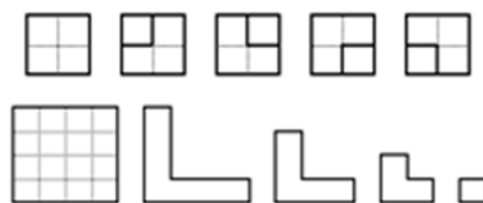


Рис. 1

квадрата 4×4 , приходят к выводу, что если квадрат вдвое больше, то и вариантов будет вдвое больше. Это утверждение достаточно легко опровергнуть, предложив посчитать количество вариантов для квадрата 3×3 – его сторона в 1,5 раза больше, значит, вариантов должно быть $4 \cdot 1,5 = 6$, а их, очевидно, больше.

Рассмотрим теперь классическую комбинаторную задачу.

Задача 2. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску а) чёрную и белую ладью; б) две чёрные ладьи?

Комментарий. Подсчитать варианты в пункте а) достаточно просто, и учащиеся успешно с этим справляются. Трудность состоит в пункте б): как правило, учащиеся утверждают, что это та же самая задача, потому что «какая разница, какого цвета ладьи». Именно поэтому здесь также полезно «уменьшить» размер задачи.

Решение. а) Есть 64 варианта, куда поставить чёрную ладью, так как всего 64 клетки. Для каждого варианта постановки чёрной ладьи есть 63 варианта, куда поставить белую. Итого $64 \cdot 63$ варианта.

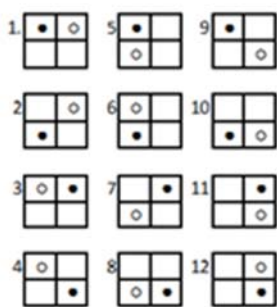


Рис. 2

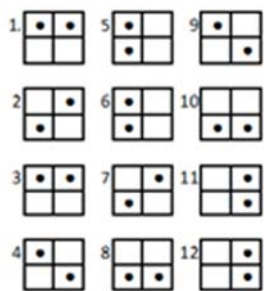


Рис. 3

б) «Уменьшим» задачу до размеров доски 2×2 и изобразим все варианты расстановки ладей из пункта а) на рис. 2.

Получилось 12 вариантов, что согласуется с количеством, посчитанным аналитически.

При попытке же нарисовать разные варианты для одноцветных ладей (можно просто перекрасить белую ладью в чёрный цвет, рис. 3), получается, что вариантов меньше ровно в два раза, и сразу понятно, почему: если ладьи разного цвета, то, меняя их местами, получаем другой вариант, а если одного цвета – то это тот же самый способ.

Значит, вариантов будет $64 \cdot 63 / 2$.

Комментарий. Полезно рассмотреть ту же самую задачу, но для трёх ладей. Часто оказывается, что учащиеся неверно понимают, почему нужно делить на 2, и утверждают, что, раз теперь ладьи 3, нужно делить на 3.

Рассмотрим ещё одну серию задач, где «уменьшение» размеров помогает понять суть задачи.

Задача 3. В пассажирском поезде 17 вагонов. Сколькими способами можно распределить по вагонам 17 проводников, если за каждым вагоном закрепляется один проводник?

Решение. Проводника для первого вагона можно выбрать 17 способами, для второго – 16 и т. д., поэтому всего способов 17!

Комментарий. Учащиеся, хотя бы немного знакомые с комбинаторикой, успешно решают эту задачу. Тем, кто не понимает, как посчитать варианты,

можно также предложить «уменьшить» задачу сначала до двух проводников и вагонов, затем для трёх, а потом вернуться к исходной задаче.

Задача 4. Семнадцать девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

Комментарий. Казалось бы, та же самая задача – о перестановках. Но в то же время, многие учащиеся чувствуют, что есть разница между рядом и кругом. Однако понять, как это влияет на решение, не могут.

Поэтому и здесь полезно предложить «уменьшить» задачу. Взять хоровод из трёх девушек. По аналогии с задачей про поезд должно получиться $3! = 6$ вариантов. Нарисуем их все (рис. 4).

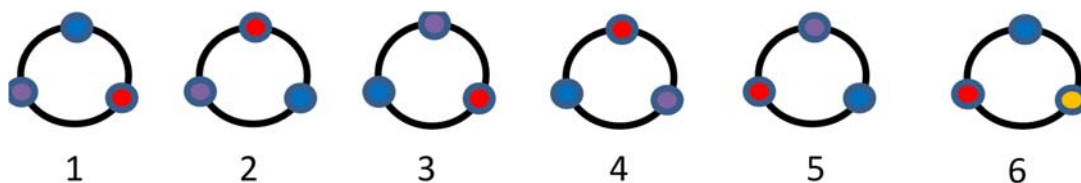


Рис. 4

А потом посмотрим, все ли хороводы разные. Оказывается, не все. Хороводов получается всего два. Хороводы 1, 4 и 5 одинаковы, так же как и хороводы 2, 3 и 6. Почему? Потому что у объектов, расположенных по кругу, нет первого и последнего элемента. Поэтому и хороводов одинаковых насчитаем столько же, сколько есть вариантов расставить определенных девушек по кругу. А их столько, сколько элементов в круге, т. е. 17. Поэтому хороводов насчитаем в 17 раз больше, чем на самом деле. И их будет $17! / 17 = 16!$

Задача 5. Сколько существует ожерелий, составленных из 17 различных бусинок?

Комментарий. Бусинки, как и девушки в предыдущей задаче, расположены по кругу, поэтому учащиеся снова утверждают, что это одна и та же задача.

Можно предложить им нарисовать ожерелья из трех бусинок. Про хороводы мы уже знаем, что разных получится всего два, поэтому и ожерелья нарисует всего два (рис. 5).

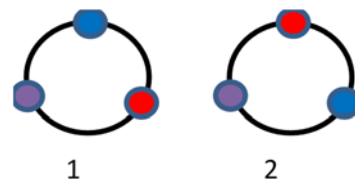


Рис. 5

На вопрос, разные ли это ожерелья, многие учащиеся сразу дают ответ, что нет, так как ожерелье можно не только повернуть, но и перевернуть. Поэтому, считая так же, как в предыдущей задаче, мы насчитаем вдвое больше ожерелий, чем на самом деле. Значит, их будет $(17! / 17) / 2 = 16! / 2$.

Задача 6. Суслик сидит на первой ступеньке лестницы, ведущей в подвал. Одним прыжком он может спуститься либо на одну, либо на две ступеньки вниз. Сколькими способами он может добраться до двенадцатой ступеньки?

Комментарий. Учащиеся, впервые сталкивающиеся с задачами такого типа, часто даже не знают, как к ним подступиться, кроме как перечислять все возможные варианты, которых здесь довольно много.

Решение. 1. Пусть ступенек всего две. Очевидно, что способ добраться до второй ступеньки всего один.

2. Пусть ступенек три. Существует два способа добраться до третьей ступеньки: за 2 прыжка на одну ступеньку, либо одним прыжком на две ступеньки вниз.

3. В случае четырёх ступенек существует 3 варианта: тремя прыжками на одну ступеньку, первым прыжком на одну, а вторым на одну, и наоборот.

4. Часто требуется сделать ещё один шаг – рассмотреть случай, когда ступенек 5 и непосредственным перебором убедиться, что существует 5 способов добраться до нижней ступеньки.

5. После этого можно увидеть правильную закономерность: количество способов спуститься на ступеньку с номером n равно сумме количества способов спуститься на ступеньку с номером $n - 1$ и количества способов спуститься на ступеньку с номером $n - 2$.

Действительно, попасть на самую нижнюю ступеньку с номером n можно либо со ступеньки с номером $n - 1$, сделав один прыжок, либо со ступеньки с номером $n - 2$, сделав два прыжка, поэтому и способов будет столько, сколькими способами можно попасть на каждую из них.

Поэтому можно составить таблицу:

n	Количество способов
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8

n	Количество способов
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89

Задача 7. У сороконожки есть 40 одинаковых носков и 40 одинаковых ботинок. Она может надевать их в любом порядке с одним лишь условием: на каждую ногу надо сначала надеть носок, а только потом ботинок. Сколькими способами она может обуться?

Решение. 1. Рассмотрим задачу про одноножку. Очевидно, вариант обуться всего один – сначала надеть носок, затем ботинок. Заметим, что без учета порядка надевания вариантов было бы $2! = 2$.

2. Рассмотрим задачу для двуножки. Выпишем все варианты, как можно обуться. Перебор будем вести по паре (носок, ботинок) для первой ноги.

Н Б	Н Б
Н Б	Н Б
Н Б	Н Б

Для каждого рассмотренного варианта задача сводится к задаче про одноножку, т. е. вариантов будет $6 \cdot 1 = 6$. Осталось понять, как научиться считать количество вариантов располо-

жить носок и ботинок для первой ноги. Если бы мы не учитывали порядок надевания, вариантов было бы $4 \cdot 3 = 12$. Почему их получается вдвое меньше? Эта

задача похожа на рассмотренную выше задачу про ладьи. Носок и ботинок, конечно, не одинаковы, но поменять их местами нельзя, так как носок должен надеваться раньше ботинка.

3. Рассмотрим теперь задачу про трёхножку. Аналогично, без учета порядка надевания, количество способов надеть первый носок и ботинок было бы $6 \cdot 5 = 30$, с учетом порядка – $6 \cdot 5 / 2 = 15$ и для каждого варианта надевания первой пары, получаем количество вариантов из задачи про двуножку.

4. Итого, если ног 40, то вариантов будет $\frac{80 \cdot 79}{2} \cdot \frac{78 \cdot 77}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{80!}{2^{40}}$

Хотелось бы отметить, что несмотря на то, что такой подход позволяет догадаться, как решить задачу, у учащихся могут возникнуть некоторые сложности.

1. Учащиеся склонны видеть неверные закономерности и делать неверные выводы на малом объеме данных, не отвечая на вопрос **почему** закономерность будет именно такой. Пример был приведен выше в комментарии к задаче 2.

2. Ещё одна распространенная ошибка – «неправильное уменьшение» задачи. Важно обращать внимание на то, что структура задачи должна оставаться неизменной.

Задача 8. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

Решение. «Уменьшим» задачу в пять раз. Получаем задачу «*Можно ли соединить проводами 3 телефона, чтобы каждый был соединен ровно с одним другим*», что, очевидно, невозможно, поэтому и в исходной задаче такой же ответ.

Комментарий. Несмотря на то что в исходной задаче ответ действительно такой же, данное рассуждение неверно и не может служить доказательством.

Приведём контрпример, рассмотрев похожую задачу.

Задача 9. В городе 6 телефонов, можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с двумя другими?

Решение. «Уменьшив» задачу в два раза, получаем ту же самую задачу, что и выше, и тот же самый ответ. Однако, очевидно, что в исходной задаче ответ другой: такой пример существует (рис. 6).

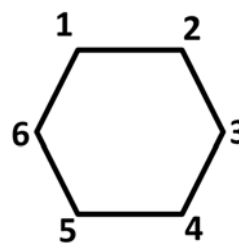


Рис. 6

В заключение хотелось бы отметить, что, на наш взгляд, плавный переход от решений комбинаторных задач исключительно перебором в 3–4-х классах, через описанное в данной работе приращение к перебору путем масштабирования задач в 5–6-х классах приводит к успешному и осознанному применению правил комбинаторики в старших классах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки / при участии И. С. Рубанова. Киров : АСА, 1994.
2. Кузьмин О. В. Перечислительная комбинаторика : учеб. пособие. М. : Дрофа, 2005. 112 с.

О. И. Бычкова, Ю. В. Колченова, И. О. Константинова

ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

МБОУ г. Иркутска «Гимназия № 1», г. Иркутск

ОСОБЕННОСТИ ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ В 7–9-Х КЛАССАХ

Процесс формирования понятия является весьма трудоемким и включает в себя ряд этапов: подготовительный, мотивационный, ориентировочный и применения. Однако зачастую учитель сводит его к простому формулированию определения понятию, что приводит к тому, что учащиеся не понимают материал и не могут применить полученные знания в процессе решения задач.

Выделяются два способа введения понятий в содержания обучения конкретно-индуктивный и абстрактно-дедуктивный. С учетом психолого-педагогических особенностей учеников 7–9-х классов целесообразно формирование геометрических понятий осуществлять конкретно-индуктивным способом по следующей схеме: приводим примеры понятий, выделяем существенные признаки понятий, вводим термин, а затем даем определение понятия с указанием связи между существенными признаками.

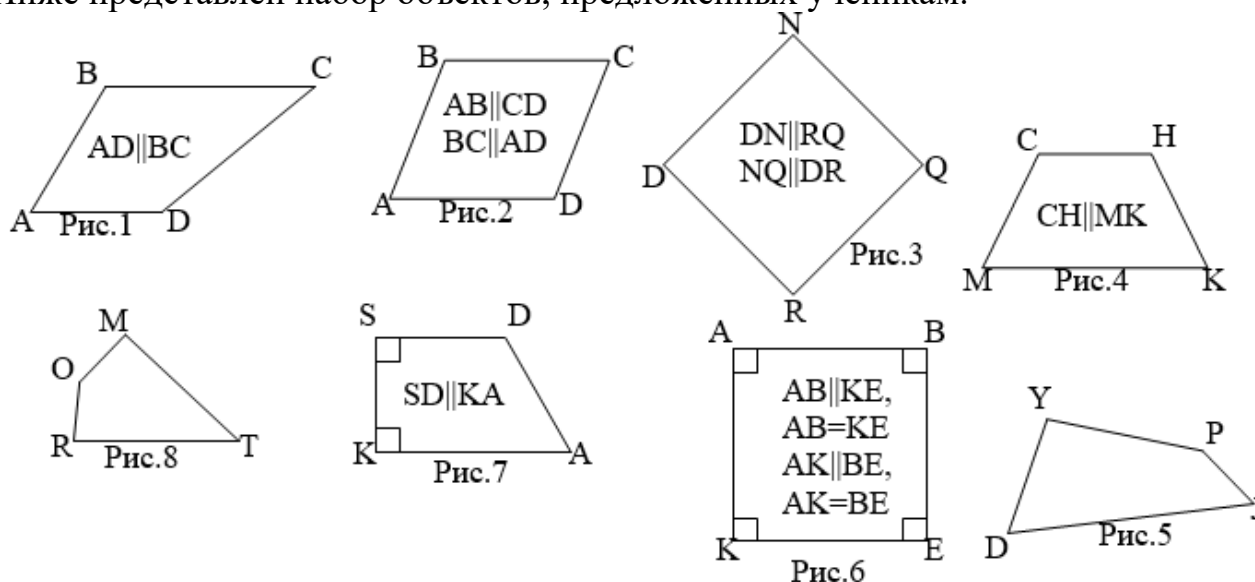
Эффективность процесса формирования понятия зависит от грамотного отбора средств и организации способов взаимодействия учителя и учащихся. Проведение учителем логико-математического анализа на этапе разработки плана урока позволит ему отобрать ЗУН, которые необходимо актуализировать, выделить действия адекватные содержанию понятия, выбрать объекты примеров и контрпримеров формируемого понятия. Важно продумать процесс выделения существенных признаков понятия самими школьниками.

В данном контексте интересной для нас оказалась работа Л. И. Боженковой [1], которая конкретизирует схему введения понятия конкретно-индуктивным способом. Автор предлагает на этапе приведения примеров рассматривать все частные случаи, сравнивать и анализировать полный набор объектов, для выделения существенных признаков, присущих данному понятию, затем составлять схему определения понятия, в которую включаются термин, ближайшее родовое понятие, все видовые отличия данного понятия, уже после выделения существенных признаков происходит формулирование полученного определения понятия и контроль «своего» определения с точным, например приведенным в учебнике. Далее формируются ведущие действия, необходимые для усвоения определения понятия, также нужно включать изучаемое понятие в связи с другими понятиями и составление при возможности классификационной и систематизационной схемы.

Важно понимать, что для работы с понятиями по данной схеме у учеников должны быть сформированы такие УУД, как «классификация», «сравнение», «подведение под понятие», «выведение следствий», «анализ» и «синтез».

Опишем реализацию данной методики на примере понятия «трапеция», формируемого на уроках геометрии в 8-х классах в рамках темы «Четырехугольники» после формирования понятия «параллелограмм».

Согласно представленной схеме предоставляем ученикам набор объектов для открытия понятия «трапеция». Задание для учеников звучит следующим образом «проклассифицируйте предложенные объекты по какому-либо основанию, по возможности дайте название каждой группе выделенных объектов». Ниже представлен набор объектов, предложенных ученикам.



В результате самостоятельной работы ученики могут предложить несколько вариантов классификации предложенных объектов, важно выбрать вариант необходимый нам для дальнейшей работы, где разделение объектов на группу происходит по числу пар параллельных сторон у четырехугольника. Далее учитель проводит беседу, в ходе которой выясняется, что двум группам объектов мы можем дать названия – «Произвольные четырехугольники» и «Параллелограммы», а название третьей группы объектов нам еще не известно, но таких объектов множество, значит нам необходимо выделить их существенные признаки, сформулировать определение и по возможности вывести свойства данных объектов.

Таблица 1

Классификация, предложенных объектов по количеству пар параллельных сторон

Группа 1	Группа 2	Группа 3
Нет параллельных сторон	Две пары параллельных сторон	Одна пара параллельных сторон
Рис. 5, рис. 8.	Рис. 2, рис. 3, рис. 6	Рис. 1, рис. 4, рис. 7.
Название: произвольные четырехугольники	Название: параллелограммы	Название: ?

Ученики, опираясь на ранее полученный опыт, могут самостоятельно выделить существенные признаки понятий, выделенных в третью группу и определить связь между существенными признаками как конъюнктивную, а значит, что

все существенные признаки должны выполняться, чтобы объект принадлежал к объему понятия. Ниже представлены существенные признаки для понятия «трапеция»:

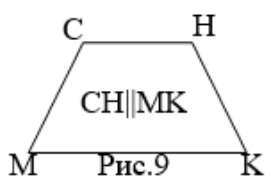
- 1) выпуклый четырёхугольник;
- 2) две стороны параллельны;
- 3) две другие не параллельны.

Далее ученики самостоятельно формулируют определение понятия и сверяют его с образцом, например с определением из учебника.

После мы предполагаем провести работу по формированию действий необходимых для усвоения понятия. В рамках рассматриваемого нами понятия, ведущим действием является действие «приведение примеров и контрпримеров», причем к 8-му классу у учеников уже сформирован высокий уровень владения этим действием, поэтому они самостоятельно могут привести необходимые примеры и контрпримеры. Важно помнить, что количество контрпримеров должно быть не меньше числа существенных признаков и каждый существенный признак должен не выполняться хотя бы в одном из контрпримеров.

Ниже представлен образец выполнения работы учениками. Номерами обозначены выделенные ранее существенные признаки. Знак «+» означает, что признак выполнен, «-» не выполнен.

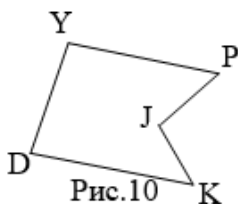
Примеры:



Существенные признаки:

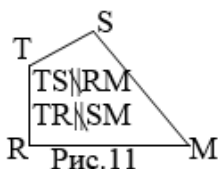
- | | |
|------|---|
| 1) + | } все существенные признаки выполняются, следовательно, фигура ABCD – трапеция. |
| 2) + | |
| 3) + | |

Контрпримеры:



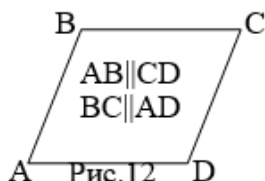
Существенные признаки:

- 1) - так как связь конъюнктивная и один из существенных признаков не выполняется, следовательно, фигура ABCD не трапеция.



Существенные признаки:

- | | |
|------|--|
| 1) + | } так как связь конъюнктивная и один из существенных признаков не выполняется, следовательно, фигура ABCD не трапеция. |
| 2) - | |



Существенные признаки:

- | | |
|------|--|
| 1) + | } так как связь конъюнктивная и один из существенных признаков не выполняется, следовательно, фигура ABCD не трапеция. |
| 2) + | |
| 3) - | |

Стоит отметить, что систематическая работа по формированию понятий на уроках математики нами проводится с 5-го класса, к 8-му классу у учеников имеется большой опыт такого рода работы, поэтому описанная методика введения понятий конкретно-индуктивным способом не занимает много времени на уроке и позволяет организовать учебный процесс таким образом, чтобы ученики стали активными участниками в открытии нового знания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боженкова Л. И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении алгебре. М. : Лаборатория знаний, 2017. 240 с.
2. Бычкова О. И., Колченова Ю. В. Оценивание уровня развития универсального учебного действия «Подведение под понятие» // Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании. Ч. 2 : материалы XI Всерос. науч.-практ. конф. / отв. ред. Дулатова З. А. Иркутск : Оттиск, 2018. С. 90–96.
3. Бычкова О. И., Колченова Ю. В. Критериальное оценивание познавательных универсальных учебных действий // Проблемы теории и практики обучения математике : сб. науч. работ, представл. на Междунар. науч. конф. «72 Герценовские чтения» / под ред. В. В. Орлова. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2019. С. 154–157.

О. И. Бычкова, Е. В. Соболева

*ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск
МБОУ г. Иркутска «Гимназия № 1», г. Иркутск*

ВОСПИТАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ СЮЖЕТНЫХ ЗАДАЧ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В 5–6-Х КЛАССАХ

В современной системе образования процесс обучения, помимо своего основного целевого назначения – формирование системы знаний и навыков в различных направлениях деятельности, характеризуется также воспитательной направленностью. Процесс воспитания находится в неразрывной связи с процессом обучения. При этом воспитание относится к сложным, трудоемким направлениям педагогической деятельности.

О воспитательной функции непосредственно говорится в Приказе Министерства просвещения Российской Федерации от 16 ноября 2022 г. № 993 «Об утверждении федеральной образовательной программы основного общего образования» и в Указе Президента Российской Федерации «Об утверждении Основ государственной политики по сохранению и укреплению традиционных российских ценностей». Это говорит о том, что данная тема важна и требует максимальной реализации в учебном процессе.

Каждый день человек решает разного рода задачи и каждая из таких задач, реализуя определенные цели, выполняет ряд разнообразных функций, таких как дидактическая, воспитывающая, развивающая, практическая и др.

Реализации воспитывающей функции задач посвящены работы О. И. Бычковой, К. В. Дейкун [1], К. И. Нешкова [3], Л. М. Фридмана [6], Р. С. Черкасова [2] и др.

Анализ педагогической и методической литературы, посвященной вопросам реализации воспитательной функции задач в учебном процессе, показал, что в работах представлены идеи и средства организации работы в данном направлении.

Одним из эффективных средств воспитания обучающихся являются сюжетные задачи. Реализация воспитательной функции в этом случае может осуществляться через сюжет задачи или через характер постановки задач.

Сюжетные задачи отражают различные стороны жизни, несут много полезной информации, поэтому их решение является одним из звеньев в системе воспитания вообще, нравственного и трудового в частности. Хорошо подобранные и правильно методически расположенные задачи помогают усвоить теоретический материал, делают учебный предмет более интересным, вызывают потребность в новых знаниях и умении самостоятельно их приобретать [4].

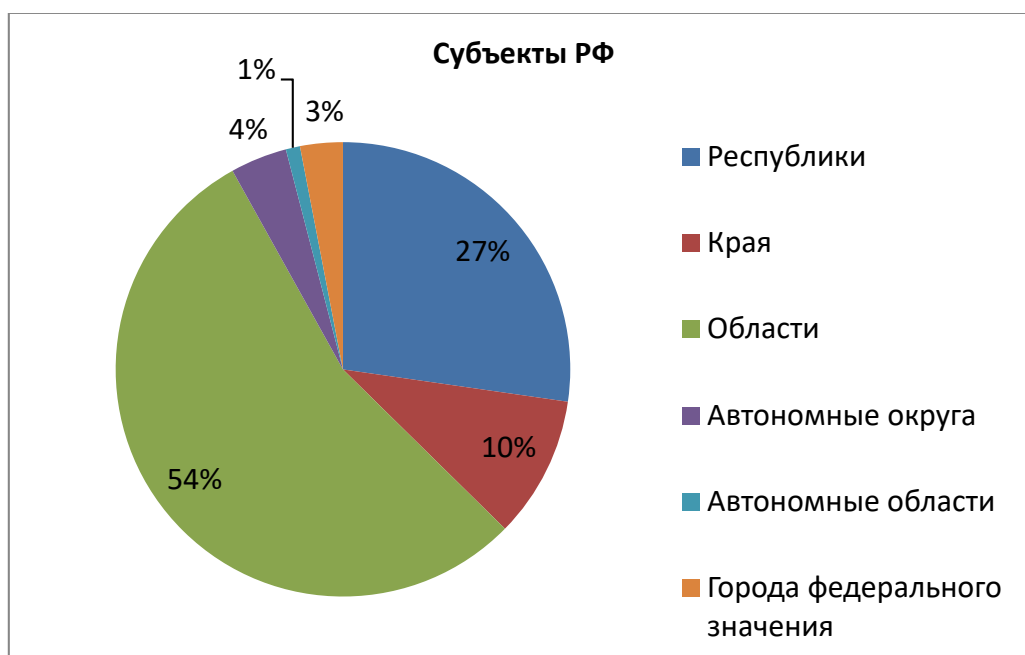
Большую роль в реализации воспитательного потенциала играют задачи, которые решают на уроках учащиеся, но обязательно задачи интересные по содержанию, богатые идеями, имеющие несколько способов решения. Подбирая таким образом задачи, можно осуществлять и нравственное, и экономическое, и

экологическое и другие виды воспитания. Задачи содержат в себе огромные ресурсы для воспитания личности, самореализующейся и самодостаточной [5].

Если рассматривать структуру решения сюжетной задачи, которая направлена на реализацию воспитательной функции, то она будет содержать все этапы работы над задачей: анализ текста задачи, поиск решения и составление плана решения, реализация плана решения, критическое осмысление полученных результатов. Однако в структуру решения сюжетных задач в этом случае добавляется еще один пункт – учебно-познавательный анализ задачи. Здесь учителю необходимо еще раз обратить внимание на наиболее интересные и познавательные моменты, которые внесла математика в приведенное содержание, описанное в фабуле задачи. Именно это будет способствовать не только обогащению знаний учащихся, но и лучшему запоминанию информации.

В качестве примера рассмотрим более подробно задачу, которая направлена на гражданское воспитание и дадим методические рекомендации по ее использованию.

Задача 1. Согласно Конституции России, Российская Федерация является федеративным государством и состоит из 89 равноправных субъектов – республик, краёв, областей, городов федерального значения, автономных округов и автономной области. Проанализировав диаграмму, выясните, сколько в нашей стране республик и областей.



Данная задача нацелена на гражданское воспитание. На этапе «анализ задачи» учителю следует начать с познавательного экскурса и вопросов к ученикам. В данном случае допустимо потратить больше времени на экскурс, по сравнению с другими этапами.

Учитель, не читая условия задачи, сначала должен погрузить учеников в данную тематику посредством общей информации о происходящем в задаче и системы вопросов:

Кто знает, какой самый главный закон в нашей стране?

Конституция – главный закон в Российской Федерации, в котором говорится о том, что наша страна является федеративным государством и состоит из 89 равноправных субъектов. А как вы думаете, что такое «субъект» в данном контексте?

Субъекты – это территориальные единицы, из которых и состоит вся наша страна. А какие субъекты на территории России вы знаете?

Верно, это области, республики, края. Но еще существуют на территории нашей страны автономные округа, одна автономная область и города федерального значения. (можно кратко пояснить ученикам отличие каждого субъекта)

Как известно из условия задачи, то всего у нас 89 субъектов. Их процентное отношение приведено на диаграмме. Как нам вычислить, сколько у нас республик и областей?

На данном этапе учащиеся составляют план решения и реализовывают его. После представленных ответов начинается этап «учебно-познавательный анализ задачи».

Как вы считаете, почему у нас так много субъектов?

А какие области вы знаете? (аналогично можно попросить привести примеры других субъектов)

Таким образом, данная сюжетная задача в процессе обучения выполняет воспитательную функцию, повышая правовую культуру учащихся.

Рассмотрим еще одну задачу, которая нацелена на реализацию экологического воспитания учащихся.

Задача 2. Ежедневно люди производят миллионы тонн различного мусора, бытовых отходов. Этот мусор накапливается и загрязняет планету. Сроки разложения мусора колеблются от нескольких дней до 1000 лет. Изучив данные таблицы, ответьте на следующие вопросы:

Сколько лет потребуется на разложение трех батареек?

Какой вид мусора разлагается дольше всего?

На сколько лет жевательная резинка разлагается быстрее, чем пластиковые бутылки?

Вид мусора	Срок разложения
Жевательная резинка	30 лет
Алюминиевая банка	500 лет
Офисная бумага	2 года
Пластиковая бутылка	190 лет
Батарейка	110 лет

Данная задача ориентирована на экологическое воспитание учащихся. Деятельность учителя должна быть организована так, чтобы у учеников пробудилось чувство экологической нравственности. Это можно осуществить посредством информативной беседы на тему экологии.

Беседа может быть выстроена при помощи следующих вопросов:

Ребята, скажите, пожалуйста, бывает такое, что вы выбрасываете мусор в неположенном месте? Вы могли даже не заметить этого.

А как вы считаете, куда потом девается этот мусор?

А может ли этот мусор испариться?

Верно, просто так он испариться не может. Но у него может начаться процесс разложения.

Сформулируйте своими словами, что означает термин «разложение»?

Отлично, мы с вами задумались над вопросом, куда же все-таки пропадает мусор и пропадает ли он вообще, а также обсудили значение термина «разложение».

Теперь необходимо внимательно изучить условия, представленные в задаче. В ней говорится о сроках разложения различного мусора, который загрязняет нашу планету. В ходе анализа таблицы учащиеся увидят, насколько вредно выбрасывать в неположенном месте даже жевательную резинку, срок разложения которой 30 лет. Тем самым в следующий раз они задумаются, прежде чем выбросить тот или иной мусор на природе или же просто в городской среде.

Возможности реализации патриотического воспитания проиллюстрируем на примере задачи № 3.

Задача 3. Село Новогромово – самое молодое село Черемховского района. Дата его основания – 1969 год и ему сейчас 54 года. Село Рысьево старше Новогромово на 43 года. Но Рысьево моложе села Нижняя Иреть на 146 лет. Насколько лет Новогромово моложе Нижней Ирети?

Проводя работу над задачей, учитель должен сам знать историю возникновения села Новогромово. Ему необходимо перед решением рассказать учащимся, когда и при каких обстоятельствах началось образование их малой Родины. Это может быть сделано в виде интерактивной презентации или в ходе беседы.

Ребята, а знаете ли вы, как и при каких обстоятельствах появилось наше село?

Как мы все знаем, Черемховский район славится своей угледобывающей промышленностью. В 1960-х годах в связи с расширением угледобычи разреза «Черемховский» несколько деревень района попадало под снос. Залежи угля проходили как раз в том месте, где стояли деревни Осадчево, Кабаново, Тютрино. Жителей этих деревень стали переселять в новую деревню, строившуюся недалеко от города Черемхово – в Новогромово.

А как вы думаете, какая улица появилась раньше остальных?

Верно, дом за домом строили жильё и первую улицу назвали Школьная, вторую – Советская.

В качестве дополнения можно предложить учащимся рассмотреть карту Черемховского района или Иркутской области, чтобы показать место расположения села.

В результате познавательной беседы и анализа условия задачи учащиеся узнают историю своей малой Родины.

После решения подобных задач учащиеся смогут повысить свой уровень воспитанности по следующим направлениям: гражданское воспитание, экологическое воспитание, патриотическое воспитание. Важно систематически использовать подобного рода задачи на уроках математики.

В содержании математики 5–6-х классов отведено достаточное количество часов на решение сюжетных задач, и они могут быть направлены на воспитание учащихся. Но для этого учителю необходимо сконструировать такого рода серии задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бычкова О. И., Дейкун К. В. Реализация информационной функции задач на уроках математики // Современные проблемы обучения математике и информатике : материалы III Всерос. (XVII межрегион.) науч.-практ. конф. преподавателей математики и информатики школ, инновац. учеб. заведений и вузов. Иркутск : ВСГАО, 2010. С. 109–113
2. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин, Н. Г. Килина, Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. М. : Просвещение, 1985. 336 с.
3. Нешков К. И., Семушин А. Д. Семушин Функции задач в обучении // Математика в школе. 1971. № 3. С. 4–5.
4. Птицына И. В., Птицына Е. В., Дронова Т. А. О содержании сюжетных задач в школьных учебниках по математике // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2019. № 3. С. 17–33.
5. Рыжова Л. И. Учебные задачи на уроках математики: Воспитательный аспект // Математика в школе. 2009. № 12. С. 2–10.
6. Фридман Л. М. Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика : учеб. пособие для учителей и студентов педвузов и колледжей. М., 2002. 204 с.

О. И. Бычкова, А. А. Чернышова

ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

МБОУ г. Иркутска «Гимназия № 1», г. Иркутск

ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ СПОСОБОМ ПОСТРОЕНИЯ ДЕРЕВА ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ УЧАЩИХСЯ 5–6-Х КЛАССОВ КАК ОДНО ИЗ СРЕДСТВ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ

В настоящее время одной из приоритетных целей обучения математике является формирование математической грамотности. Математическая грамотность является одним из компонентов функциональной грамотности и выражается в умении «распознавать математические объекты в реальных жизненных ситуациях, применять освоенные умения для решения практико-ориентированных задач, интерпретировать полученные результаты и оценивать их на соответствие практической ситуации» [1, с. 10]. Согласно методическим рекомендациям по формированию математической грамотности [2] и содержащихся в них примерных заданиях, направленных на формирование и оценку данного компонента, можно выделить одно из метапредметных умений, формирование которого необходимо осуществлять при обучении математике. Таким умением является способность обучающихся решать практические задачи методом перебора возможных вариантов. Одним из способов выполнения перебора возможных вариантов является составление дерева вариантов. В школьном курсе математики 5–6-х классов недостаточно полно реализуются познавательные функции данной темы, а имеющиеся методические и учебные пособия не содержат описания методических особенностей формирования данного умения. В связи с этим возникает необходимость описать методику его формирования.

Предлагаемые нами методические рекомендации по обучению решению комбинаторных задач способом построения дерева возможных вариантов учащихся 5–6-х классов конструируются в соответствии с технологией поэтапного формирования умственных действий. Данные методические рекомендации реализуются в рамках курса «Функциональная грамотность», направленного на комплексное формирование компонентов функциональной грамотности во взаимосвязи с обучением математике. Приведем фрагмент тематического планирования данного курса, отражающего занятия, связанные с формированием рассматриваемых умений (табл. 1).

На изучение раздела «Перебор вариантов» отводится четыре часа, из которых два часа приходится на обучение выполнению полного перебора через перечисление всех возможных комбинаций, и еще два часа на обучение перебору вариантов с помощью составления дерева возможных вариантов. Описываемая нами методика рассматривается на уроке № 3 по теме «Дерево вариантов».

Фрагмент тематического планирования курса

Раздел	Содержание материала	Кол-во часов	Характеристика основных видов деятельности ученика
Перебор возможных вариантов	Полный перебор вариантов	2	<i>Выполнять</i> перебор возможных вариантов путем составления схемы «дерево возможных вариантов» и простого перечисления всех возможных комбинаций (полный перебор). <i>Применять</i> выполнение полного перебора к разрешению ситуаций, приближенных к реальным. <i>Формулировать</i> правило выполнения полного перебора всех возможных вариантов и перебора способом составления дерева вариантов при разрешении практической проблемной ситуации.
	Дерево вариантов	2	<i>Анализировать</i> финансовую информацию. <i>Оценивать</i> и решать финансовые проблемы, <i>применять</i> финансовые знания. <i>Оценивать</i> полученное решение заданной реальной проблемной ситуации

На подготовительном этапе этого урока мы считаем целесообразным актуализировать следующие умения:

- определение количества элементов в наборе и количество элементов, из которых составляется набор,
- распознавание ситуации, в которой порядок элементов набора важен и ситуации, в которой порядок элементов не важен.

Для этого могут быть использованы задания следующего вида:

Задание 1. Определите, опираясь на представленную ситуацию, из какого количества объектов составляют набор и сколько элементов в наборе:

а) У Алисы есть много разных предметов для рисования: гуашь, акварель, альбом для рисования, цветные карандаши, восковые мелки и кисточка. Она решила сделать подарок, включающий в себя три предмета из имеющихся.

б) В кондитерской продается лимонное пирожное, шоколадное пирожное, пирожное со сливочной начинкой. Из них составляют набор из двух различных пирожных.

в) Из цифр составляют двухзначное число.

Задание 2. Рассмотрите ситуацию и в каждом случае ответьте на вопрос:

а) Наборы из яблока, апельсина и мандарина решили упаковать в пакеты. В первый пакет положили яблоко, апельсин и мандарин (ЯАМ), а во второй мандарин, яблоко и апельсин (МЯА). Наборы первого и второго пакета будут считаться одинаковыми или разными?

б) Из цифр составляют двухзначное число. Числа (наборы) 23 и 32 будут считаться одинаковыми или разными?

в) Синюю, желтую и белую гирлянду повесили на первое, второе и третье окно. Наборы СБЖ и ЖБС будут одинаковыми или разными?

г) Из коробки достали два шарика разного цвета – синий и красный. Наборы КС и СК будут одинаковыми или разными?

В данном случае задание 1 направлено на актуализацию умения в определении количества элементов в наборе, а задание 2 на актуализацию умения распознавать ситуацию, в которой порядок следования элементов важен, и ситуацию, в которой порядок не важен.

Этап мотивации может быть реализован посредством ознакомления обучающихся с двумя ситуациями, в которых необходимо осуществить перебор возможных вариантов. Особенностью первой ситуации является небольшое количество объектов перебора, что в свою очередь позволяет незатруднительно найти возможные варианты получившихся наборов. Решение первой ситуации заключается в применении умения выполнять полный перебор вариантов с перечислением всех получившихся наборов. С заданиями такого типа обучающиеся уже сталкивались на предыдущем уроке по теме «Перебор возможных вариантов», где выполняли перебор вариантов способом полного перебора. В качестве первой ситуации обучающимся может быть предложена ситуация следующего вида:

Ситуация «Свободное место»

После проведенной уборки в шкафу освободилось две полки, на которые необходимо расставить две картонные коробки с вещами. Коробки имеют одинаковый размер и отличаются только цветом – одна из них желтая, а другая серого цвета. Сколько есть способов расставить эти коробки на свободных полках в шкафу, если на одну полку помещается одна коробка?

После нахождения ответа на заданный вопрос, обучающимся предлагается следующая ситуация, содержащая большее количество объектов перебора:

Ситуация «Фабрика одежды»

На фабрике «Русский текстиль» изготавливают различную одежду. Сейчас на фабрике производится и упаковывается новая партия футболок. Футболки выпускают белого цвета, черного, в полоску и в клетку. Было решено в наборы упаковывать по три футболки, так чтобы расцветки в одном наборе не повторялись. Сколько различных наборов можно упаковать из таких футболок?

Задание, связанное с предлагаемой ситуацией, по своей специфике направлено на возникновение у обучающихся проблемной ситуации, согласно которой нахождение возможных вариантов ранее известным способом затруднительно из-за большего числа объектов перебора. Погружение в проблемную ситуацию является подведением обучающихся к формулированию цели урока, которая заключается в необходимости узнать новый способ выполнения перебора возможных вариантов, позволяющий не потерять комбинации при большом числе объектов перебора.

Ориентировочный этап формирования действия предполагает определенную последовательность, указанную на схеме на рис. 1.

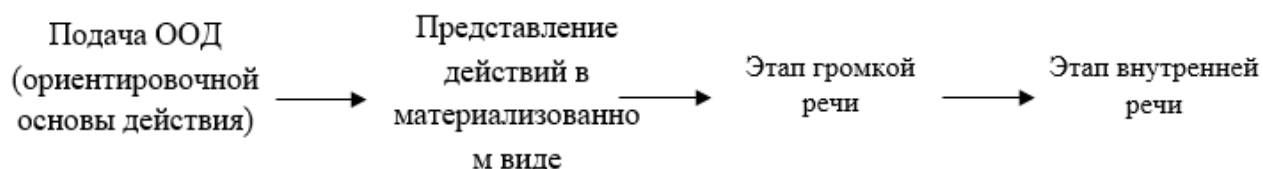


Рис. 1. Схема организации ориентировочного этапа

Опишем детально представленные на схеме (рисунок 1) этапы. Для формирования умения в осуществлении перебора возможных вариантов при помощи построения дерева вариантов, согласно теории поэтапного формирования действий, нами был выбран прямой путь управления деятельностью обучающихся и в рамках ориентировочного этапа занятия предложена следующая ориентировочная основа действия:

*Правило перебора вариантов
(составление дерева возможных вариантов)*

1. Определить, перебор каких объектов нужно выполнить, обозначить объекты символами.
2. Выяснить, сколько элементов в соединении.
3. Выделить условия перебора объектов.
4. Выполнить перебор первого элемента соединения в соответствии с выделенными условиями.
5. Выполнить перебор второго элемента в соответствии с выделенными условиями и т. д. пока не произойдет перебор n-ого элемента.
6. Проверить, удовлетворяют ли соединение выделенным условиям.
7. Записать ответ.

После ознакомления с ориентировочной основой на этапе представления действий в материализованном виде обучающиеся совместно с учителем находят ответ на вопрос в ситуации «Фабрика», применяя изученное правило. На данном этапе учитель организует деятельность по обучению применения данного правила к решению задач на примере двух ситуаций. Учитель руководит обсуждением решения задач, задает обучающимся вопросы, подводящие к применению каждого шага в правиле. Этап представления действий в материализованном виде сопровождается заполнением обучающимися следующих раздаточных карточек (табл. 1).

Следующей ситуаций, рассмотрение которой происходит на этапе представления действий в материализованном виде, является ситуация «Цветочная клумба». Отличие данной ситуации от предыдущей заключается в таком переборе возможных вариантов, при котором порядок следования элементов является важным. Обсуждение данной ситуации организуется учителем аналогично предыдущей и также сопровождается заполнением раздаточной карточки (табл. 2).

Раздаточная карточка к ситуации «Фабрика одежды»

Ситуация «Фабрика одежды»

На фабрике «Русский текстиль» изготавливают различную одежду. Сейчас на фабрике производится и упаковывается новая партия футболок. Футболки выпускают белого цвета, черного, в полоску и в клетку. Было решено в наборы упаковывать по три футболки, так чтобы расцветки в одном наборе не повторялись. Сколько различных наборов можно упаковать из таких футболок?

1 шаг: Определить, перебор каких объектов нужно выполнить, Б, Ч, К, П
обозначить объекты символами:

2 шаг: Выделить, сколько элементов в сочетании (наборе): n = 3

3 шаг: Вычленить условия перебора объектов:

Первое условие: в наборе должно быть три футболки.

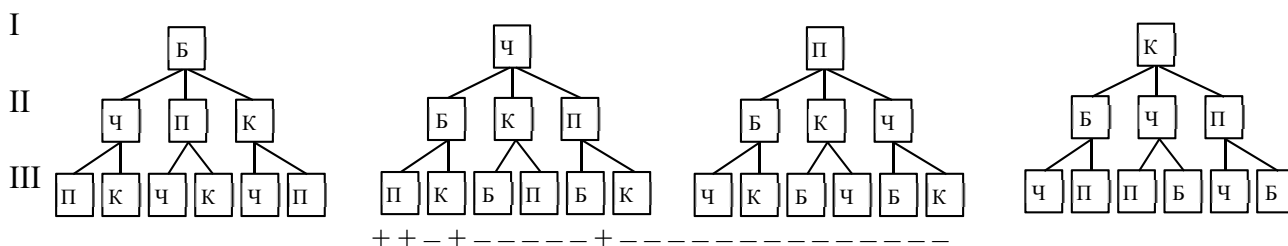
Второе условие: расцветки в одном наборе не должны повторяться.

Третье условие: наборы должны быть различными.

4 шаг: Выполнить перебор первого элемента соединения в соответствии с выделенными условиями:

I Б Ч П К
5 шаг: Выполнить перебор второго элемента в соответствии с выделенными условиями и т. д. пока не произойдет перебор n-ого элемента.

6 шаг: Проверить, удовлетворяют ли соединения выделенным условиям.



7 шаг: Запишите ответ: 4 различных набора (БЧП, БЧК, БПК, ЧКП).

Такие этапы формирования действия, как этап громкой речи и внутренней речи, проводятся в рамках рассмотрения ситуации, аналогичной разобранным ранее:

Ситуация «Столовая»

В школьной столовой на завтрак, обед и полдник предлагают разные блюда. Саша решил посчитать, сколько различных меню, состоящих из основного блюда, дополнительного блюда и напитка, можно составить. При этом, манную кашу Саша покупать не планирует ни в какой день. Он считает, что получится покупать разнообразные завтраки не больше 10 дней подряд.

1. Прав ли Саша?

2. Какой вариант завтрака будет самым дорогим?

3. Сколько Саше потребуется денег, чтобы попробовать все возможные блюда на завтрак в столовой, если каждый раз, когда он будет выбирать сырники, будет брать 2 шт.?

Меню (завтрак)	
<i>Основные блюда:</i>	
Каша овсяная	35 руб./порция
Каша манная	30 руб./порция
Омлет	46 руб./порция
<i>Дополнительные блюда:</i>	
Бутерброд с маслом и сыром	16 руб./шт.
Бутерброд с ветчиной	21 руб./шт.
Булочка с джемом	32 руб./шт.
Сырники	48 руб./шт.
<i>Напитки:</i>	
Чай	7 руб.
Какао напиток	10 руб.

Раздаточная карточка к ситуации «Цветочная клумба»

Ситуация «Цветочная клумба»

Перед новым летним дачным сезоном Аня решила попробовать сама посадить цветы. На даче имеется три свободные клумбы, на которых она может провести свой эксперимент. В одну клумбу можно посадить один из видов цветов: бархатцы, маргаритки, анютины глазки или васильки. В клумбе посередине обязательно должны быть бархатцы. Цветы в трех клумбах должны быть посажены разные. Сколько существует способов посадки цветов в эти три клумбы?

1 шаг: Определить, перебор каких объектов нужно выполнить, обозначить объекты символами: Б, М, А, В

2 шаг: Выяснить, сколько элементов в сочетании (наборе): $n = 3$

3 шаг: Выделить условия перебора объектов:

Первое условие: в клумбе посередине обязательно должны быть бархатцы.

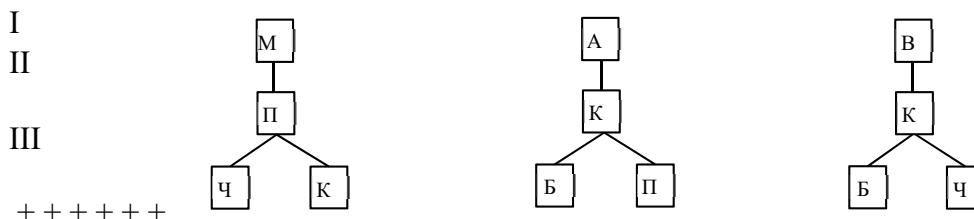
Второе условие: цветы в трех клумбах должны быть посажены разные

4 шаг: Выполнить перебор первого элемента сочетания (набора) в соответствии с выделенными условиями:

I М А В

5 шаг: Выполнить перебор второго элемента в соответствии с выделенными условиями и т. д. пока не произойдет перебор n -ого элемента.

6 шаг: Проверить, удовлетворяют ли сочетания (наборы) выделенным условиям.



7 шаг: Запишите ответ: 6 различных наборов (МПЧ, МПК, АКБ, АКП, ВКБ, ВКЧ).

Завершающим этапом занятия является обсуждение возникшей ранее проблемной ситуации. Результатом такого обсуждения должен стать вывод обучающихся об ознакомлении с новым способом перебора возможных вариантов, являющимся более удобным для перебора большого количества объектов.

На следующем уроке № 4 из раздела «Перебор вариантов» будет организована деятельность обучающихся по закреплению и применению изученного в рамках данного занятия правила через разрешение практических ситуаций. Усвоение рассматриваемого нами умения способствует не только формированию математической грамотности, но и служит пропедевтикой для формирования таких понятий как сочетание и размещение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральная рабочая программа основного общего образования «Математика» базовый уровень (для 5–9 классов образовательных организаций) Министерства просвещения Российской Федерации Федерального государственного бюджетного научного учреждения Института стратегии развития образования Российской академии образования. Москва, 2023. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/13_ФПП_Математика_5–9-классы_база.pdf (дата обращения 15.03.2024)

2. Методические рекомендации. Математическая грамотность / Л. О. Рослова, О. А. Рыдзе, Е. С. Квитко [и др.] ; под общ. ред. Г. С., Ковалевой, Л. О. Рословой. Москва, 2021. 87 с.
URL: http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/matematicheskaya-gramotnost/%D0%9C%D0%93_%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5%D0%A0%D0%B5%D0%BA%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%B4%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%B8_2021.pdf (дата обращения: 15.03.2024).

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕМЫ «ИСПЫТАНИЯ БЕРНУЛЛИ»

Согласно обновленному Федеральному государственному образовательному стандарту (далее – ФГОС) основного общего образования и среднего общего образования учебный предмет «Математика» в 7–9-х, 10–11-х классах разделен на три учебных курса: «Алгебра», «Геометрия» и «Вероятность и статистика». В связи с этим нововведением в системе школьного математического образования перед педагогами ставится задача создания условий для выполнения требований по достижению метапредметных и предметных результатов обучающимися, обозначенных во ФГОС.

В рамках данной статьи мы остановимся на некоторых методических рекомендациях по изучению темы «Испытания Бернулли» в 10-м классе [3], способствующих достижению предметных образовательных результатов. Методические рекомендации будут полезны и для преподавания в 9-м классе.

Испытания Бернулли позволяют объяснить, как случайный выбор можно экспериментально применять для изучения свойств больших совокупностей, а также объяснить статистическую основу социологических опросов и точность выводов [1].

В 10-м классе углублённого уровня к основным предметным результатам освоения темы «Испытания Бернулли» можно отнести умение находить вероятности событий: в серии испытаний до первого успеха, в серии испытаний Бернулли, в опыте, связанном со случайным выбором из конечной совокупности [3].

На начальном этапе изучения учебного материала обучающиеся должны:

- уметь определять количество исходов в каждом испытании (в схеме Бернулли исходов должно быть ровно два, условно называемые успехом и неудачей);
- уметь определять независимость испытаний (результат одного эксперимента не влияет на результаты других);
- осознавать, что вероятность успеха является величиной постоянной для всех испытаний.

Рекомендуется начать с простых задач, которые решаются достаточно быстро с помощью правил умножения и сложения вероятностей. В примере 1 обучающиеся могут продемонстрировать данную возможность.

Пример 1. Стрелок стреляет по 4 одинаковым мишеням по одному разу. Вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Найдите вероятность, что он попадёт в первую мишень, а в три оставшиеся промахнется [2].

Решение. Определим вероятность промаха в мишень 1 — $0,8 = 0,2$. Для ответа на поставленный вопрос необходимо умножить вероятности результата

каждого независимого испытания: попадания (обозначение «+») и промаха (обозначение «-») в мишень $0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,0064$.

В примере 1 переформулируем вопрос «Найдите вероятность, что он попадёт в первую мишень, а в три оставшиеся промахнется» на «Найдите вероятность того, что стрелок поразит ровно три мишени?».

Пример 2. Стрелок стреляет по 4 одинаковым мишеням по одному разу. Вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок поразит ровно три мишени?

При обсуждении данного примера может поступить предложение рассмотреть четыре произведения вероятностей и сложить результаты. Проблемная ситуация создается при увеличении количества первоначальных мишеней, например, начало задачи будет выглядеть так: «Стрелок стреляет по 20 одинаковым мишеням по одному разу». Обучающиеся могут заметить закономерность и предложить использовать не перебор всех случаев, а число сочетаний произведений вероятностей. Таким образом, происходит переход к формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, причем $p + q = 1$ и применяется только для двух исходов с вероятностями p и q .

Решение. Вероятность промаха в мишень равна $1 - 0,8 = 0,2$, т. е. $p = 0,8$, $q = 0,2$. $P_4(3) = C_4^3 \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2)^1 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 0,512 \cdot 0,2 = 0,4096$.

Далее следует рассмотреть примеры её применения, постепенно увеличивая сложность. Отметим, что, во-первых, важно напомнить правило нахождения число сочетаний, а во-вторых, обучающиеся должны уметь извлекать из условия задачи вероятности успеха и неудачи.

Пример 3. В урне 20 синих и 10 красных шаров. Вынули 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из 4 вынутых шаров окажется 2 синих.

Решение. Обозначим через A – достали синий шар, $\bar{A}$ – достали красный шар, тогда $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(\bar{A}) = \frac{1}{3}$. Применяем формулу Бернулли:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

Пример 4. Тест по алгебре состоит из 10 вопросов. На каждый вопрос в тесте предлагается 4 варианта ответа, только один из которых правильный. Какова вероятность того, что студенту без подготовки к тесту удастся угадать правильные ответы, по крайней мере, на 6 вопросов? (результат округлите до десятитысячных)

Решение. A – студент ответит правильно,

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(\bar{A}) = q = \frac{3}{4},$$

$$P(K \geq 6) = P_{10}(6) + P_{10}(7) + P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10) =$$

$$= C_{10}^6 p^6 q^4 + C_{10}^7 p^7 q^3 + C_{10}^8 p^8 q^2 + C_{10}^9 p^9 q^1 + C_{10}^{10} p^{10} q^0 = \frac{20686}{4^{10}} \approx 0,0197$$

«Испытания Бернулли» сопровождается ситуациями, когда рассматривается конкретное число испытаний до наступления успеха, более или менее определенного числа испытаний, а также в заданном промежутке числа испытаний. Для каждого случая следует разобрать пример и формулу.

$$1. P(k) = q^{k-1} \cdot p$$

Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет четверка. Найдите вероятность того, что будет сделано **5 бросков**.

Решение. A – выпала четверка, $\bar{A}$ – не выпала четверка, $p = P(A) = \frac{1}{6}$,

$$q = P(\bar{A}) = \frac{5}{6}, P(5) = p \cdot q^4 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{7776}.$$

$$2. P(k \leq n) = 1 - q^n$$

Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет четверка. Найдите вероятность того, что будет сделано **не более 3 бросков**.

Решение. Применяя найденное значение q в предыдущем случае, найдем

$$P(k \leq 3) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}.$$

$$3. P(k \geq n) = q^{n-1}$$

Из урны, в которой лежат 7 красных и 3 синих шара достают один шар. Если вытащенный шар красный, то его кладут обратно. Испытание повторяется до тех пор, пока не будет вытащен синий шар. Найдите вероятность того, что будет сделано **не менее 4 попыток**.

Решение. Обозначим через A – достали синий шар, $\bar{A}$ – достали красный шар, $P(A) = 0,3$, $P(\bar{A}) = 0,7$, $P(K \geq 4) = (0,7)^3 = 0,343$.

$$4. p(a \leq k \leq b) = q^{a-1} - q^b$$

Монета бросается до первого выпадения орла. Какова вероятность, что будет сделано **от пяти до семи испытаний** (включительно)?

Решение. Вероятность выпадения орла $\frac{1}{2}$, герба $\frac{1}{2}$.

$$p(5 \leq k \leq 7) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^7} = \frac{8-1}{128} = \frac{7}{128} = 0,0546875$$

Рекомендуем на начальном этапе освоения формул продемонстрировать алгоритм их появления. В этом случае снижается вероятность путаницы у обучающихся в предложенных формулах.

Приведем пример вывода формулы для последнего случая, в котором необходимо найти вероятность события для заданного промежутка количества испытаний.

$$\begin{aligned} p(a \leq k \leq b) &= p(k \leq b) - p(k \leq (a-1)) = 1 - q^b - (1 - q^{a-1}) = \\ &= 1 - q^b - 1 + q^{a-1} = q^{a-1} - q^b \end{aligned}$$

Полную версию конспекта, содержащего примеры и формулы по теме «Испытания Бернулли», можно найти по ссылке <https://disk.yandex.ru/d/b5MwcmpDARHRPA>. Конспект может быть использован на различных этапах освоения учебного материала: на начальном этапе изучения темы, при выполнении практических заданий в качестве справочной информации и опоры для решения, при обобщении, систематизации и повторении учебного материала, а также для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математика. Вероятность и статистика: 7–9-е классы: базовый уровень : метод. пособие к предметной линии учебников по вероятности и статистике И. Р. Высоцкого, И. В. Яценко / под ред. И. В. Яценко. 2-е изд. М. : Просвещение, 2023. 38 с.
2. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Сдам ГИА: Решу ЕГЭ. URL: <https://math-ege.sdamgia.ru/> (дата обращения: 16.03.2024).
3. Федеральная образовательная программа среднего общего образования. URL: <https://goo.su/OA2WP> (дата обращения: 16.03.2024).

ТЕХНОЛОГИЯ СМЕШАННОГО ОБУЧЕНИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ: НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ

Современная педагогика постоянно стремится обогатить образовательный процесс, используя новейшие методики и технологии. Среди таких инноваций особое внимание привлекает смешанное обучение, которое начинает активно применяться и на уроках.

Смешанное обучение (*blended learning*) – это технология, объединяющая в себе элементы традиционного классно-урочного обучения и онлайн-обучения. В контексте учебного процесса по математике это может означать использование онлайн-курсов, интерактивных заданий, образовательных видеороликов и других цифровых ресурсов в сочетании с традиционными уроками и практическими занятиями.

Преимущества смешанного обучения

1. Индивидуализированная поддержка

Смешанное обучение позволяет учителям адаптировать материалы и задания под уровень каждого конкретного ученика. Это позволяет ученикам с разной скоростью усваивать материал, получить дополнительные объяснения, если это необходимо.

2. Развитие цифровой грамотности

Использование онлайн-ресурсов и программ для изучения математики помогает учащимся развивать цифровые навыки и адаптироваться к использованию технологий в своем образовательном процессе. Это важный навык в современном информационном обществе.

3. Повышенная мотивация

Интерактивные задания, онлайн-игры и мультимедийные материалы оживляют уроки математики, делая их более увлекательными для учащихся. Это способствует повышению мотивации и интереса к изучению математики.

4. Расширение границ образования

Смешанное обучение позволяет учащимся получать доступ к дополнительным материалам, объяснениям и учебным ресурсам вне школьных стен. Это способствует расширению границ образования и дает возможность углубленного изучения интересующих тем.

Перевернутый класс (*flipped classroom*) – это модель обучения, в которой традиционная структура урока переворачивается с ног на голову. Вместо того чтобы учитель проводил лекции и давал материал на уроке, учащиеся изучают материал самостоятельно дома, используя видеолекции, учебные материалы и другие ресурсы. Затем на уроке время тратится на обсуждение, практику и коллективное решение проблем, что позволяет глубже усвоить материал, получить помощь и направление от преподавателя и даже сотрудничать друг с другом.

Обучение частично происходит оффлайн (очная встреча преподавателя с учащимися) и онлайн. Учитель может использовать онлайн-ресурсы, такие как видео уроки, интерактивные задания и онлайн-тесты, чтобы помочь учащимся лучше понять материал.

Один из ресурсов, которые я применяю в своей деятельности: конструктор образовательных ресурсов CORE.

CORE – это платформа для создания и управления онлайн-курсами и уроками. Она предоставляет множество инструментов для создания интерактивных и эффективных уроков, в том числе «Перевернутый класс». CORE также предоставляет возможность настройки доступа к вашему уроку или курсу, определения уровня доступа для каждого пользователя.

При создании модели урока «перевернутый класс» (flipped classroom) CORE можно использовать для подготовки обучающих материалов.

Например:

- создание видеоуроков: учителя могут использовать CORE для записи видеолекций с объяснением математических концепций, чтобы учащиеся могли изучать их дома перед уроком.
- подготовка интерактивных заданий: с помощью CORE можно подготовить интерактивные математические задания, которые решаются самостоятельно.
- обратная связь: через CORE преподаватели могут создавать тесты и опросы для проверки подготовки перед уроком и оценки понимания материала.
- совместная работа: учащиеся могут использовать CORE для совместной работы над математическими проектами и обмена материалами.

Таким образом, CORE может быть полезным инструментом для подготовки материалов и заданий для уроков.

Обратная связь в конструкторе CORE при прохождении урока осуществляется через несколько основных механизмов:

- автоматические проверки: CORE может предусматривать проверку ответов на задания с использованием автоматических алгоритмов. Если ответ совпадает с правильным ответом, то система может предоставить положительную обратную связь или перейти к следующему заданию. В случае неправильного ответа, система может предложить повторно попытаться решить задание или предоставить подсказку.
- оценочные инструменты: CORE может также использовать оценочные инструменты, позволяющие преподавателям оценивать работы учащихся и предоставлять им обратную связь на основе критериев, установленных заранее.
- комментарии и обсуждения: в конструкторе CORE может быть предусмотрена функциональность, позволяющая ученикам и преподавателям оставлять комментарии к заданиям, обсуждать их и предоставлять обратную связь друг другу.

Эти механизмы позволяют обеспечить эффективную обратную связь в процессе обучения с использованием конструктора CORE.

С помощью данного конструктора можно создавать уроки, курсы, контрольные работы, олимпиады, онлайн школы и др.

Следующая модель смешанного обучения – ротация станций.

Ротация станций (*station rotation*) – это модель смешанного обучения, в которой ученики проводят время в различных «станциях» или областях в классной комнате или школе, используя компьютеры, учебные материалы, групповую работу и индивидуальное обучение. Ученики могут работать в группах в одной станции, учиться с помощью учебных программ на компьютере в другой станции, а затем заниматься проектной работой или обсуждением в третьей. Эта модель позволяет учителям индивидуализировать обучение, предоставляя ученикам разнообразные возможности для изучения материала и сотрудничества.

Например, на уроке математики в 5-м классе по теме «Многоугольники», на этапе применения новых знаний используется данная модель, преимуществом которой являются формируемые личные связи, спонтанность, дающая возможность более быстрого усвоения новых знаний, и формируемые при электронном обучении в информационно-образовательной среде гибкость, индивидуализация, интерактивность обучения.

Разнообразие заданий повышает у учащихся мотивацию к изучению математики. Учащиеся в группах выполняют полученные задания. Проговаривают каждый этап, объясняют и аргументируют свои действия. По сигналу обучающиеся переходят из одной рабочей зоны в другую для выполнения заданий. На станциях решают задачи, направленные на формирование функциональной грамотности.

На станции работы с учителем «Проектировщики», выполняют задание практического содержания. Показывают практическое решение задачи путем рассуждений. На станции «Танграмм», выполняют логическое задание.

На станции «Квест-игра» по инструкции выполняют задания игры на сайте <https://joyteka.com/100525698>. Самостоятельно выполняют задания, анализируют затруднения.

Межпредметные задачи на уроке используются для связи теории с практикой. Так, например, задания, предложенные учащимся на станции «Проектировщик», являются практическими и связывают математику с таким предметом, как технология.

На уроке учтены возрастные возможности учащихся. Для младших школьников целесообразно использование модели «смены рабочих зон». Учащиеся переходят из одной станции на другую, выполняя задания в игровой форме. Учитываются так же индивидуально-психологические особенности детей. Например, дети с ОВЗ попадают в группы с сильными учащимися, где происходит наставничество.

Смешанное обучение на уроках математики открывает новые перспективы для образования, обогащая учебный процесс современными технологиями и учитывая индивидуальные потребности учащихся. Это инновационное направление предоставляет учителям и ученикам новые возможности для эффективного и увлекательного изучения математики в современном мире.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перечень компетенций, необходимых для осуществления практической инженерной деятельности. URL: <http://icc.tomsktp.ru>

РАЗВИТИЕ ТВОРЧЕСКОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОСТИ НА УРОКЕ МАТЕМАТИКИ

Чтобы развивать ребенка как личность необходимо создать ситуацию успеха, она поможет повысить интерес к математике и развить творческое мышление. Создание творческих работ помогает развивать умение выражать свои мысли логично и последовательно. Математические творческие работы требуют усилия со стороны ребенка, учителя и родителя, но это очень увлекательная работа и в нее окунаешься с головой. Я даю задание, придумать задачу, нарисовать фигуру в координатной плоскости, учащиеся с интересом принимают участие и придумывают очень увлекательные задания.

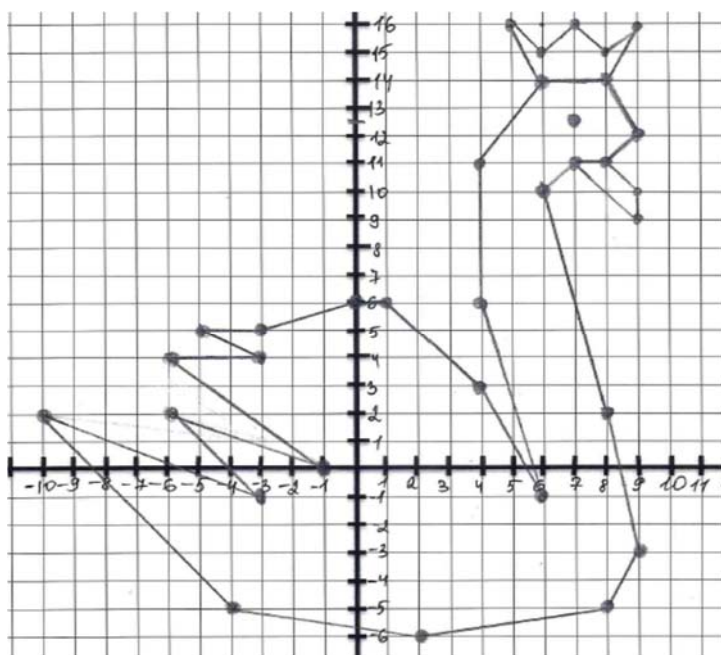
Я стремлюсь развивать творческие способности в условиях дифференцированного и индивидуального обучения. Ребята придумывают творческие задания дома, затем в классе демонстрируют свои работы.

Разнообразные индивидуальные домашние задания по математике способствуют укреплению связи обучения с жизнью, развитию творческой самостоятельности и активности школьников в обучении, преодолению трафарета в задавании учебного материала на дом, развитию индивидуальных интересов учащихся, повышению качества обучения в школе, учитель может создать оптимальные условия для развития творческой самостоятельности мышления школьников.

К 225-летию со дня рождения А. С. Пушкина обучающимися были составлены разные задачи.

1. Задачи на координатной плоскости.

Построить фигуру по координатам



Координаты

Лебедь: (6;14) (8;14) (9;12)
(8;11) (7;11) (6;10) (8;2) (9;-3)
(8;-5) (2;-6) (-4;-5) (-10;2)
(-3;-1) (-6;2) (-1;0) (-6;4)
(-3;4) (-5;5) (-3;5) (0;6) (1;6)
(4;3) (6;-1) (4;6) (4;11)
Клюв: (9;10) (9;9) (7;11) (8;11)
Корона: (5;16) (6;15) (7;16)
(8;15) (9;16) (8;14) (6;14)
Глаз точка (7;12,5)

Рис. 1

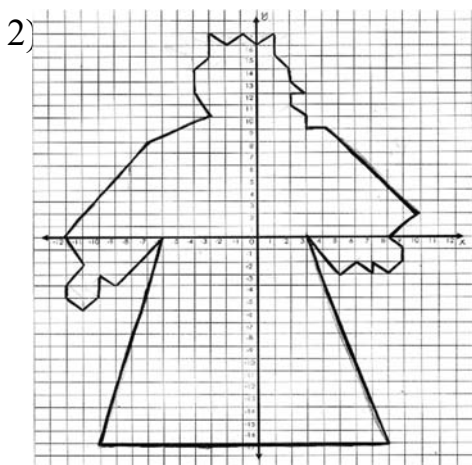


Рис. 2

Координаты

Царь: (8;0) (10;2) (4;9) (3;9) (3;10) (2;11)
 (2;12) (3;12) (2;13) (2;14) (1;15) (1;17) (0;16)
 (-1;17) (-2;16) (-3;17) (-3;15)
 (-4;14) (-4;16) (-3;10) (-7;8)
 (-12;0) (-11;-2) (-12;-4) (-12;-5) (-11;-6)
 (-10;-5) (-9;-4) (-6;0) (-10;-17) (8;-17) (3;0)
 (5;-3) (6;-2) (7;-3) (7;-2) (8;-3) (9;-2) (9;-1)
 (8;0)

2. Задачи по сказкам Пушкина

Задача 1. Жил старик со своею старухой у самого синего моря. Они жили в ветхой землянке ровно тридцать лет и три года. Старик ловил неводом рыбу, старуха пряла свою пряжу... Все 30 лет и 3 года старуха пряла 9 мотков пряжи в месяц. Сколько мотков пряжи спряла старуха за все время?

Решение:

- 1) $30 + 3 = 33$ (года) – прожил старик со своею старухой.
- 2) $33 \cdot 12 = 396$ (месяца) – столько месяцев пряла пряжу старуха.
- 3) $396 \cdot 9 = 3564$ (мотка) – спряла старуха за все время.

Ответ: 3564 мотка пряжи спряла старуха за 33 года.

Задача 2. Князь Гвидон, превратившись в комара, долетел мимо острова Буяна в царство славного Салтана за 12 часов со скоростью 2 км/ч. Сколько времени князь Гвидон потратит на этот же путь, превратившись в шмеля, если скорость шмеля в 3 раза больше скорости комара?

Решение:

- 1) $12 \cdot 2 = 24$ (км) – путь, который преодолел князь Гвидон, превратившись в комара
- 2) $2 \cdot 3 = 6$ (км/ч) – скорость шмеля
- 3) $24 : 6 = 4$ (ч) – столько времени князь Гвидон потратит на путь, превратившись в шмеля

Ответ: 4 часа потратит князь на путь, превратившись в шмеля.

Задача 3. У Лукоморья на дубу листьев в 3 раза больше, чем звеньев золотой цепи. А количество звеньев равно сумме шагов, которые кот ученый сходил направо и налево. Сколько листьев на дубу, если шагов, сделанных котом направо – 1700, что составляет четвертую часть от количества шагов, сделанных ученым котом налево?

Решение:

- 1) $1700 \cdot 4 = 6800$ (шагов) – сделал кот ученый налево.
- 2) $6800 + 1700 = 8500$ (звеньев) – в золотой цепи
- 3) $8500 \cdot 3 = 25\,500$ (листьев) – на зеленом дубу у Лукоморья

Ответ: у Лукоморья на зеленом дубу 25 500 листьев.

Задача 4. В своем хрустальном доме белка-затейница за утро разгрызает 50 орехов, в течение дня – 70 орехов и вечером – 40 орехов. $\frac{3}{8}$ всех «скорлупок золотых» от орехов князь Гвидон откладывал в казну в виде золотых монет в течение дня. Сколько килограмм отлитых золотых монет будет в казне князя Гвидона через неделю, если скорлупка одного ореха весит 10 грамм?

Решение:

- 1) $50 + 70 + 40 = 160$ (орехов) – разгрызает белка за неделю.
- 2) $160 : 8 \cdot 3 = 60$ (шт.) – «скорлупок золотых» откладывал князь Гвидон в казну.
- 3) $60 \cdot 10 = 600$ (гр) – столько золотых монет откладывал князь в течение дня.
- 4) $600 \cdot 7 = 4200$ (гр) = 4 кг 200 гр – столько отлитых золотых монет будет у князя Гвидона через неделю.

Ответ: 4 кг 200 гр отлитых золотых монет будет у князя Гвидона через неделю

Задача 5. Царевна испекла пирог для семи богатырей. Стали богатыри пить чай с пирогом. Первый и пятый богатыри съел $\frac{2}{16}$ пирога, каждый второй, третий и шестой богатыри съели по $\frac{1}{16}$ пирога, каждый четвертый богатырь съел на $\frac{1}{16}$ пирога больше чем третий, седьмой богатырь съел столько сколько первый и второй вместе. Какую часть пирога съел четвертый богатырь, седьмой богатырь? Остался ли пирог после того, как богатыри попили чай?

Решение

- 1) $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$ пирога съел 4 богатырь
- 2) $\frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ пирога съел 7 богатырь
- 3) $\frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} = 12/16$ пирога съели
- 4) $1 - 12/16 = 4/16$ осталось пирога

Ответ: четвертый богатырь съел по $2/16$ пирога, седьмой богатырь съел $3/16$ пирога, после того как богатыри попили остался пирог.

Задача 6. Белка в день разгрызала 20 золотых орехов. Каждое ядро изумруда весило 10 грамм. Золотая скорлупа имела массу 5 грамм. Сколько золота и изумрудов ежедневно добавлялось у царя Салтана благодаря белке?

Решение:

- 1) $20 \cdot 5 = 100$ (гр).
- 2) $20 \cdot 10 = 200$ (гр).

Ответ: 200 грамм изумрудов, 100 грамм золота

Задача 7. Князь Гвидон в облике комара пролетел до царства Салтана 104 км. Его скорость полета была 6,5 км/ч. Во время полета он сделал 5 остановок длительностью 10 мин, чтобы отдохнуть и набраться сил для дальнейшего полета. Сколько всего времени потратил комар на полет до царства Салтана?

Решение:

1) $104 : 6,5 = 16$ (ч) – время полета комара без остановок.

2) $10 \cdot 5 = 50$ (мин) – потратил князь Гвидон на отдых.

3) $16 \text{ ч} + 50 \text{ мин} = 16 \text{ ч } 50 \text{ мин}$ – потратил князь Гвидон на весь полет.

Ответ: 16 ч 50 мин потратил князь Гвидон на весь полет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лазук Н. Я. Внеклассная работа по математике в средней школе. Минск : Нар. асвета, 1968. 98с.
2. Королева К. П. Формирование познавательных интересов и творческого отношения к учению. Свердловск : СГПИ, 1987. 154с
3. Арнольд В. И. Задачи для детей от 5 до 15 лет. М. : МЦНМО, 2007. 16 с.
4. Пушкин А. С. Сказки / [илл. И. Бибина]. М. : Худож. лит., 1999. 144 с;

РАЗВИТИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ ДЕЙСТВИЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В 5-Х КЛАССАХ

В новом Федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования (далее ФГОС ООО), утверждённым приказом Минпросвещения России от 31.05.2021 № 287, установлены требования к результатам освоения обучающимися программ основного общего образования – личностные, метапредметные и предметные [1]. По сравнению с предыдущим ФГОС ООО, планируемые результаты скорректированы, более чётко и структурно прописаны метапредметные результаты. В структуру метапредметных результатов включены: познавательные универсальные учебные действия; универсальные коммуникативные действия; универсальные регулятивные действия, приведена их детализация.

Универсальные познавательные действия обеспечивают формирование базовых когнитивных процессов обучающихся [2]. Универсальные познавательные действия, сформированные на достаточно высоком уровне, позволяют учащимся самостоятельно добывать необходимые им знания; ставить учебные и жизненные цели, искать способы их достижения; контролировать и оценивать результат деятельности, тем самым формируя гибкое критическое мышление у школьников.

Действительно, стандартные (типовые) задачи, направленные на механическую отработку алгоритма решения задачи в ограниченной мере способствуют развитию логики мышления учащегося, не учат самостоятельно работать с информацией, практически не развивают исследовательские способности. А значит, решая только стандартные задачи на уроках математики, у учащихся не будут формироваться универсальные познавательные действия на требуемом уровне, который предполагает самостоятельное применение этих действий в новых ситуациях. Решение нестандартных математических задач всегда сопряжено с активной работой мысли.

Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий в книге «Как научиться решать задачи» приводят следующее определение: «Нестандартная задача – это такая задача, для которой в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения» [3]. Другими словами, нестандартные задачи – это задачи, которые не имеют чёткого алгоритма решения, но могут быть сведены к «алгоритмичным» задачам.

Под нестандартными задачами мы будем подразумевать задачи, формулировка которых носит занимательный характер, алгоритм решения которых либо не существует, либо неизвестен обучающимся, но которые возможно решить средствами школьного курса математики. Мы будем рассматривать нестандарт-

ные задачи в контексте предметно-тематического планирования содержания занятий. Разрабатываемый нами сборник нестандартных задач для обучающихся 5-х классов будет содержать нестандартные задачи, решение которых опирается на изученные ранее или изучаемые в 5-м классе темы курса математики. Он может использоваться как на внеклассных занятиях, так и на уроках математики в пятых классах, так как содержит нестандартные задачи, привязанные к тематическому планированию и дополняющие учебный материал.

В результате анализа научно-методической литературы, посвященной исследованию проблемы обучения решению задач, в том числе и нестандартных, мы составили таблицу, описывающую процесс организации поиска решения нестандартных задач (табл. 1). В этой таблице мы попытались формализовать деятельность учителя при реализации всех этапов решения задачи, а также провести анализ показателей формирования УПД в процессе поиска решения задач.

Таблица 1

Формирование УПД в процессе поиска решения задачи

№	Этап поиска решения задачи	Рекомендации (учителя)	Показатели сформированности универсальных познавательных действий для учащихся 5-х классов
1	Исследование условия задачи	О чём задача? Сделай краткую запись/схему/чертёж	– Воспринимать, формулировать суждения: утвердительные и отрицательные, единичные, частные и общие; условные; – выбирать форму представления информации и иллюстрировать решаемые задачи схемами, диаграммами, иной графикой и их комбинациями;
		Что требуется найти в задаче?	– использовать вопросы как исследовательский инструмент познания; формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему, самостоятельно устанавливать искомое и данное, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение;
		Можно ли определить неизвестное в задаче через известные данные? Если да, то как?	– выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, отношений между понятиями; формулировать определения понятий; устанавливать существенный признак классификации, основания для обобщения и сравнения, критерии проводимого анализа;
		Исходные данные в задаче приведены в полном объёме? Недостаточно данных? Есть лишние данные?	– выявлять недостаточность и избыточность информации, данных, необходимых для решения задачи;

№	Этап поиска решения задачи	Рекомендации (учителя)	Показатели сформированности универсальных познавательных действий для учащихся 5-х классов
2	Построение пути (плана решения) от искомого к данным задачи	Можно ли переформулировать задачу в стандартную? Если можно, переформулируй.	– преобразовывать суждения: утвердительные и отрицательные, единичные, частные и общие; условные; – выявлять математические закономерности, взаимосвязи и противоречия в фактах, данных, наблюдениях и утверждениях; предлагать критерии для выявления закономерностей и противоречий; – делать выводы с использованием законов логики, дедуктивный и индуктивных умозаключений, умозаключений по аналогии; – выбирать, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления;
		Можно ли разбить задачу на стандартные подзадачи, которые решаются сразу? Если да, то разбей на подзадачи	
		Можно ли ввести вспомогательные элементы, которые облегчат решение задачи? Если да, введи вспомогательные элементы	
		Все ли данные задачи использованы? Все ли понятия рассмотрены и приняты во внимание?	
3	Реализация найденного плана решения задачи	Контроль каждого шага решения. Можешь ли ты доказать, что выполненное действие правильное?	– проводить самостоятельно несложные доказательства математических фактов, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; обосновывать собственные рассуждения;
	Анализ найденного решения	Можно ли сделать проверку? Если да, то сделай проверку	– самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений;
		Правдоподобен ли результат? Почему?	– оценивать надёжность информации по критериям, предложенным учителем или сформулированным самостоятельно
		Можно ли решить задачу другим способом? Попробуй найти другое решение задачи и получить тот же результат.	– выбирать способ решения учебной задачи (сравнивать несколько вариантов решения, выбирать наиболее подходящий с учётом самостоятельно выделенных критериев);
		Для каких задач можно использовать найденный метод решения или полученный результат?	– прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях

На обучение методам решения нестандартных задач рекомендуется отводить не менее 0,5 учебного часа в неделю.

Как известно, для успешного решения олимпиадных задач учащиеся должны обладать не только глубокими математическими знаниями, но и высоким уровнем владения УПД. Рассмотрим задачу с пригласительного этапа ВсОШ для 5-го класса в 2023 г. [4]

Задача. Маша написала на доске десятизначное число, все цифры которого различны. Петя заменил каждую цифру числа на количество соседних цифр в числе, которые меньше неё. Выбери, какие варианты у Пети могли получиться?

Варианты ответов: а) 1101111111 б) 1201102110 в) 1021022020 г) 0112102011

Решение. Число не может начинаться с последовательности 120.... Единица вначале означает, что первая цифра больше второй, а двойка на втором месте показывает, что вторая цифра больше первой и третьей, получаем противоречие. Остальные варианты возможны: для а) подойдёт число 9801234567, для в) число 5496382170, для г) число 2679108345.

Для того чтобы ребёнок успешно решил данную задачу, у него должны быть сформированы базовые логические действия, базовые исследовательские действия, а также умение работать с информацией (табл. 2).

Таблица 2

Показатели сформированности УПД при решении олимпиадной задачи

Показатель сформированности УПД	Как проявляется при решении задачи
<i>Базовые логические действия</i>	
Выявлять математические закономерности, взаимосвязи и противоречия в фактах, данных, наблюдениях и утверждениях.	Ребёнок должен проанализировать каждый вариант ответа и выявить противоречие в ответе б).
Проводить самостоятельно несложные доказательства математических фактов, выстраивать аргументацию, приводить примеры; обосновывать собственные рассуждения	Учащийся выстраивает аргументацию, доказывая, что вариант б) не подходит и приводит примеры для остальных примеров.
<i>Базовые исследовательские действия</i>	
Аргументировать свою позицию	Учащийся доказывает правильность ответа логически выстроенными правильными рассуждениями.
Проводить по самостоятельно составленному плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой	Задача явно имеет исследовательский характер. Ребёнок проводит исследование по выявлению правильных вариантов
<i>Работа с информацией</i>	
Выбирать, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления	Для верного решения учащемуся необходимо проанализировать и систематизировать информацию из условия задачи

Поскольку олимпиадные задачи в большинстве своём имеют сложные формулировки, и для их решения нужны длинные комбинированные умозаключения, можно сделать вывод о том, что для решения таких задач УПД учащихся должны быть сформированы на более высоком уровне.

Во время изучения темы: «Десятичная система счисления. Натуральный ряд» детям можно предложить следующие нестандартные задачи, в порядке возрастания сложности.

Задача 1. Инженер Василий Петрович научил Робота писать цифры 0 и 1. Сколько двузначных чисел сможет написать Робот? Сколько трёхзначных?

Решение. Число не может начинаться с 0, поэтому первая цифра числа будет 1. Второй цифрой могут быть 0 или 1, поэтому Робот сможет написать только два двузначных числа: 10, 11. Используя аналогичные рассуждения, получаем четыре трёхзначных числа, которые может написать Робот: 100, 101, 110, 111.

Ответ. 2, 4.

Для того чтобы ребёнок успешно решил данную задачу, у него должны быть сформированы базовые логические действия, базовые исследовательские действия, а также умение работать с информацией (табл. 3).

Таблица 3

Формирование УПД

Показатель сформированности УПД	Как проявляется при решении задачи
<i>Базовые логические действия</i>	
Выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов.	Ребёнок должен учесть тот факт, что числа не могут начинаться с нуля
<i>Базовые исследовательские действия</i>	
Аргументировать свою позицию	Учащийся доказывает правильность ответа логически выстроенными правильными рассуждениями
Проводить по самостоятельно составленному плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой	Задача имеет исследовательский характер. Ребёнок проводит исследование того какой может быть первая, вторая или третья цифра числа
Самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов.	Проведя исследование учащемуся необходимо правильно сформулировать вывод о количестве двузначных и трёхзначных чисел
<i>Работа с информацией</i>	
Выбирать, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления	Для верного решения учащемуся необходимо проанализировать и систематизировать информацию из условия задачи

Также в рамках урока можно предлагать учащимся задачи, содержание которых подобно содержанию олимпиадных задач, но с более простой конструкцией, решение которых будет формировать нужные УПД (Табл. 4).

Задача 2. Маша, используя цифры 0, 1, 2, 3, 4, написала на доске пятизначное число, все цифры которого различны. Петя заменил каждую цифру числа на количество соседних цифр в числе, которые меньше неё.

а) Напишите, какой-нибудь вариант, который мог получиться у Пети.

б) Напишите, какой-нибудь вариант, который не мог получиться у Пети.

Решение.

а) Здесь можно составить любое пятизначное число, все цифры которого различны. Но необходимо учесть то, что число не может начинаться с нуля. Например, 12340. Тогда набор цифр, который напишет Петя, будет выглядеть следующим образом: 01121.

б) Здесь учащимся нужно продумать, какие цифры могут стоять на каждой позиции, а какие нет. Например, если первая цифра варианта, который написал Петя 0, означая, что первая цифра числа Маши меньше второй, то вторая цифра Пети не может быть также равна нулю, поскольку это означало бы, что вторая цифра числа Маши меньше первой и третьей – противоречие. Поэтому одним из вариантов решения этой задачи может быть набор цифр: 00211.

Таблица 4

Формирование УПД

Показатель сформированности УПД	Как проявляется при решении задачи
<i>Базовые логические действия</i>	
Выявлять математические закономерности, взаимосвязи	В пункте а) ребёнок должен учесть тот факт, что числа не могут начинаться с нуля
Проводить самостоятельно несложные доказательства математических фактов, выстраивать аргументацию, приводить примеры; обосновывать собственные рассуждения	В пункте б) учащийся выстраивает аргументацию, доказывая, какой последовательности цифр не может быть
<i>Базовые исследовательские действия</i>	
Аргументировать свою позицию	Учащийся доказывает правильность ответа логически выстроенными правильными рассуждениями
Самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов	Проведя исследование учащемуся необходимо правильно подобрать правильные варианты ответов в пунктах а) и б)
<i>Работа с информацией</i>	
Выбирать, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления	Для верного решения учащемуся необходимо проанализировать данные задачи

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. URL: <https://fgos.ru/fgos/fgos-ooo/> (дата обращения: 01.03.2023)
2. Рабочая программа основного общего образования предмета «Математика» базовый уровень. URL: https://edsoo.ru/Primernaya_rabochaya_programma_osnovnogo_obschego_obrazovaniya_predmeta_Matematika_proekt_.htm (дата обращения 01.03.2023)
3. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи. М. : Просвещение, 1989. 192 с.
4. Разбор заданий пригласительного этапа ВсОШ для 5 класса в 2023 году. URL: <https://siriusolymp.ru/invite2023/mathematics> (дата обращения 09.03.2023).

З. А. Дулатова, А. И. Ковыршина
Е. С. Лапшина, Н. Н. Штыков
ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ВСЕРОССИЙСКОГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО КОНКУРСА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ «СУБСТАНЦИЯ»

Всероссийский профессиональный конкурс для учителей и преподавателей математики «Субстанция» проводится в два этапа. Первый этап проводится в формате дистанционного отборочного тура в ограниченное время (10–14 дней). Участникам необходимо ввести ответы на предоставленные задания в систему. Второй этап проводится в два тура в формате письменной олимпиады. Первый тур заключается в решении задач углубленного курса школьной математики (по алгебре, комбинаторике, теории чисел, геометрии, математическому анализу и другим разделам). Второй тур посвящен решению задач школьных математических олимпиад, соответствующих муниципальному и региональному уровням Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Приведем условия и решения некоторых заданий второго этапа конкурсов, проводимых в 2022 и 2023 гг. При отборе был отдан приоритет теоретико-числовым, комбинаторным и нестандартным алгебраическим задачам.

1. У Лены ровно такая сумма денег, на которую можно купить мешок свеклы и мешок моркови. Если Лена купит на 20 % свеклы больше, то ей сделают 40%-ную скидку на морковь, и оставшихся денег ей хватит на мешок моркови. Если Лена купит на 40 % моркови больше, то ей сделают 20%-ную скидку на свеклу, и оставшихся денег на покупку мешка свеклы тоже хватит. В обоих случаях деньги могут еще и остаться. Найдите отношение цены мешка свеклы к цене мешка моркови.

Решение. Пусть x – цена мешка свеклы, а y – цена мешка моркови. Тогда денег у Лены $x + y$. Если Лена купит больше свеклы, то $1,2x + 0,6 \leq x + y$, если больше моркови, то $1,4y + 0,8x \leq x + y$. А значит, $2y \geq x$ и $2y \leq x$. Следовательно, $x = 2y$ и $x : y = 2 : 1$.

Ответ. 2: 1.

2. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $p^6 - 7p^2 + 6$ для простых чисел $p \geq 11$.

Решение. Запишем числа в виде $p^6 - 7p^2 + 6 = (p - 1)(p + 1)(p^2 - 2)(p^2 + 3)$. Заметим, что простое число $p > 3$ при делении на 8 может давать остатки 1, 3, 5 или 7. Тогда квадрат этого числа при делении на 8 дает остаток 1. Следовательно, число $p^2 - 1$ делится на 8. Аналогичным образом можно доказать, что число $p^2 - 1$ делится на 3 при тех же ограничениях на p .

Таким образом $(p-1)(p+1)$ делится на 24 для простых $p > 3$. Также $p^2 + 3$ делится на 4. Для простых чисел $p > 7$ справедливо $p^2 = 7k + 1$, $p^2 = 7k + 4$, $p^2 = 7k + 2$ и, значит, $(p-1)(p+1)$, $p^2 + 3$, $p^2 - 2$ соответственно делятся на 7. Тогда $p^6 - 7p^2 + 6$ делится на 672.

Пример. Для $p = 11$ и $p = 13$ НОД $(672 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31, 672 \cdot 167 \cdot 43) = 672$.
 Ответ. 672.

3. Найдутся ли такие натуральные числа a , b и c , что $1000 + a = b^2$ и $1000a = c^2$.

Решение. Так как $a = b^2 - 1000$, то $1000b^2 - 10^6 = c^2$. В левой части последнего равенства стоит число, кратное 1000, а значит c^2 делится на 1000. Следовательно, c делится на 100, $c = 100c_1$. Тогда $10^3b^2 - 10^6 = 10^4c_1^2$, $b^2 - 10^3 = 10c_1^2$. Далее, b^2 делится на 10, а значит $b = 10b_1$ и $10^2b_1^2 - 10^3 = 10c_1^2$. Поэтому $10b_1^2 - 10^2 = c_1^2$ и $b_1 = 10$, $c_1 = 30$ — одно из частных решений этого уравнения. Тогда $b = 100$, $c = 3000$, $a = 9000$.

Ответ. Да, например, $a = 9000$, $b = 100$, $c = 3000$.

4. В ряд размещены желтые и черные шарики, желтых шариков больше 4. Если между двумя желтыми шариками есть желтый шарик, то между этими желтыми шариками есть не менее 4 черных шариков. Если между двумя черными шариками есть 3 черных шарика, то между этими черными шариками есть не менее 2 желтых шариков. Какое наибольшее количество черных шариков может быть между двумя желтыми шариками, между которыми нет желтых шариков?

Решение. Оценка. Между двумя желтыми не может быть 5 и более расположенных подряд черных шариков. Иначе найдутся два черных шарика, между которыми есть 3 черных шарика, но нет желтых.

Пример. В ряд размещены шарики следующим образом: ж, ч, ч, ч, ч, ж, ж, ч, ч, ч, ч, ж, ж (ч — черный, ж — желтый шарик).

Ответ. 4.

5. Положительные числа a , b , c такие, что $a + b \geq ab$, $b + c \geq bc$, $a + c \geq ac$. Докажите, что $4(a + b + c) \geq 3abc$.

Решение. Складывая неравенства, получим $2(a + b + c) \geq ab + bc + ca$, тогда $4(a + b + c) \geq 2(ab + bc + ca)$. Неравенство $a + b \geq ab$ умножим на c , неравенство $b + c \geq bc$ на a , а $a + c \geq ac$ на b и сложим полученные результаты, получим $2(ab + bc + ca) \geq 3abc$.

Следовательно, $4(a + b + c) \geq 3abc$.

6. Имеются 5 черных и 19 желтых точек, которые распределены по 9 подмножествам. Каждая черная точка соединена отрезками хотя бы с 14 другими точками, а каждая желтая точка соединена не более чем с 3 другими. Всегда ли найдется подмножество точек, в котором нет ни одного отрезка?

Решение. Каждая черная точка соединена отрезками не более чем с 4 другими черными точками, значит она соединена отрезками не менее чем с 10 желтыми точками. Значит, отрезков, соединяющих желтые и черные точки, не менее 50. С другой стороны, так как всего не более 57 отрезков из 19 желтых точек, то

отрезков, соединяющих желтые точки, не более $\frac{57-50}{2}$, т. е. не более трех отрезков, соединяющих желтые точки. Черные точки попадают не более чем в 5 подмножеств, поэтому хотя бы в четырех подмножествах находятся только желтые точки. Следовательно, хотя бы в одном подмножестве с желтыми точками нет ни одного отрезка.

Ответ. Да.

7. Найдите наименьшее натуральное число k такое, что уравнение $2xy - 3x - 5y = k$ имеет нечётное количество решений в натуральных числах.

Решение. Преобразуем уравнение $2xy - 3x - 5y = k$, предварительно домножив его на 2, к виду $(2x - 5)(2y - 3) = 2k + 15$. Отметим, что каждый из сомножителей в левой части может быть равен любому нечетному натуральному числу при соответствующих натуральных значениях x и y . Четность количества решений уравнения определяется четностью числа делителей числа $2k + 15$. Нечетное число натуральных делителей имеет только полный квадрат. Определим, при каком наименьшем натуральном k число $2k + 15$ является квадратом. Перебрав значения от 1 до 5, получаем, что при $k = 5$ $2k + 15 = 25$. Для каждого делителя 1, 5, 25 числа 25 находим соответствующее решение, $(x, y) \in \{(3, 14), (5, 4), (15, 2)\}$.

Ответ. 5.

8. Для каких значений a из чисел $a - \sqrt{2}$, $a - \frac{1}{a}$, $a + \frac{1}{a}$, $a^2 + 2\sqrt{2}$ ровно 3 числа являются целыми?

Решение. Если числа $a - \frac{1}{a}$ и $a + \frac{1}{a}$ — целые, то их сумма $2a$ также является целым числом. Но тогда числа $a - \sqrt{2}$ и $a^2 + 2\sqrt{2}$ не будут целыми, и трёх целых чисел не найдётся. Значит, одно из чисел $a - \frac{1}{a}$ и $a + \frac{1}{a}$ не является целым, а число $a - \sqrt{2}$ — целое. Тогда $a = b + \sqrt{2}$, b — целое. Число $a^2 + 2\sqrt{2} = (b^2 + 2) + 2(b + 1)\sqrt{2}$ будет целым только при $b + 1 = 0$.

Итак, $b = -1$, $a = -1 + \sqrt{2}$. Необходимо проверить, что ровно одно из оставшихся чисел является целым. Действительно, $a - \frac{1}{a} = -2$ и $a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{2}$.

Ответ. $-1 + \sqrt{2}$.

9. В ящике есть белые, жёлтые и чёрные шарики массой 100, 200 и 300 грамм. (Есть хотя бы один шарик каждого из трёх цветов и есть хотя бы один шарик каждой из трёх масс.) Всегда ли найдутся 3 шарика, никакие два из которых не совпадают ни по цвету, ни по массе?

Решение. Рассмотрим 5 шариков: три белых шарика с массами, 200 и 300 грамм, желтый шарик массой 100 грамм и черный шарик массой 100 грамм. Для наглядности будем их обозначать следующим образом: б-100, б-200, б-300, ж-100, ч-100. Если мы отберем три шарика разных цветов, то в наборе обязательно будут присутствовать два шарика одной массы 100 грамм. Если возьмем три шарика с разными массами, то в наборе обязательно будут присутствовать два белых шарика.

10. Все натуральные числа от 20 до 219 распределили по двум наборам по 100 чисел в каждом. В каждом наборе вычислили произведение всех чисел, а затем вычислили сумму двух произведений. Может ли эта сумма быть простым числом?

Решение. Если в каждом наборе найдётся хотя бы одно чётное число, то соответствующая сумма будет чётной, большей 2. Значит, требуется, чтобы все 100 чётных чисел попали в один набор, а все 100 нечётных – в другой.

Но в этом случае каждый из наборов будет содержать числа, кратные 3, и сумма будет делиться на 3.

Ответ. Нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьмина Н. Д., Ковыршина А. И., Лапшина Е. С. Элементы теории чисел в школе и вузе : учеб. пособие. Иркутск : Аспринт, 2017. 132с.
2. Штыков Н. Н., Лапшина Е. С., Ковыршина А. И. Внеурочная деятельность по математике. Ч. 1 : учеб. пособие. Иркутск : Аспринт, 2018. 108 с.

НОВОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «ВЕКТОРЫ» НА ЕГЭ В 2024 ГОДУ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

В 2024 г. первая часть ЕГЭ по математике профильного уровня дополнилась еще одним заданием по геометрии, это задание 2 по теме «Векторы». Из кодификаторов 2023 и 2024 годов видно, что данная тема «Координаты и векторы» была включена в перечень элементов содержания, проверяемых на ЕГЭ в полном объеме (рис. 1 и 2). Задания на координатной плоскости уже входили в экзамен, но отдельно векторы в этом году впервые.

Кодификатор ЕГЭ 2024 г.		МАТЕМАТИКА, 11 класс. 15 / 18	
Код	Проверяемый элемент содержания	Уровень программы	Наличие данного элемента содержания в кодификаторе ЕГЭ прошлых лет
7	Геометрия		
7.1	Фигуры на плоскости	БУ, УУ	+
7.2	Прямые и плоскости в пространстве	БУ, УУ	+
7.3	Многогранники	БУ, УУ	+
7.4	Тела и поверхности вращения	УУ	+
7.5	Координаты и векторы	УУ	+

Рис. 1

БУ – базовый уровень, УУ – углубленный уровень

Кодификатор ЕГЭ 2023 г.

МАТЕМАТИКА, 11 класс. 21 / 22

Код раз дела	Код контроли руемого элемента	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы		
		Федеральный компонент государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования	Наличие позиций ФК ГОС в ПООП СОО	
			базовый уровень	углублённый уровень
5.6	Координаты и векторы			
	5.6.1	Координаты на прямой, декартовы координаты на плоскости и в пространстве	Векторы и координаты в пространстве. <i>Решение задач с помощью векторов и координат</i>	Векторы и координаты. <i>Решение задач с помощью векторов и координат</i>
	5.6.2	Формула расстояния между двумя точками, уравнение сферы	<i>Уравнение сферы в пространстве. Формула для вычисления расстояния между точками в пространстве</i>	Формула расстояния между точками. Уравнение сферы
	5.6.3	Вектор, модуль вектора, равенство векторов, сложение векторов и умножение вектора на число	Векторы и координаты в пространстве. Сумма векторов, умножение вектора на число, угол между векторами	Векторы и координаты. Сумма векторов, умножение вектора на число
	5.6.4	Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам	Коллинеарные и компланарные векторы. <i>Решение задач с помощью векторов и координат</i>	Векторы и координаты. <i>Решение задач с помощью векторов и координат</i>
	5.6.5	Компланарные векторы. Разложение по трём некопланарным векторам	Коллинеарные и компланарные векторы. <i>Теорема о разложении вектора по трём некопланарным векторам</i>	Векторы и координаты
	5.6.6	Координаты вектора, скалярное произведение векторов, угол между векторами	Векторы и координаты в пространстве. Сумма векторов, умножение вектора на число, угол между векторами. <i>Скалярное произведение векторов</i>	Векторы и координаты. Угол между векторами. Скалярное произведение

Рис. 2

Руководитель комиссии по разработке контрольно-измерительных материалов ЕГЭ по математике Яценко И. В. на ежегодном вебинаре, посвященном анализу структуры ЕГЭ-2024 по математике, озвучил причины, по которым задание 2 по теме «Векторы» включили в задания КИМ:

- 1) расширение возможностей решения геометрических задач с помощью векторного метода;
- 2) межпредметные связи (например, математика и физика);
- 3) подготовка к обучению в высших учебных заведениях, так как в вузе тема «Векторы» является основой для изучения таких тем, как «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия» и т. д.

В демоверсии ЕГЭ 2024 по математике профильного уровня представлены только два задания (рис. 3).

В открытый банк тестовых заданий ФИПИ, подобные задания добавили совсем недавно. Ученикам подобные задания приходилось искать на просторах интернета или в сборниках вариантов для подготовки к ЕГЭ по профильной метаматематике под редакцией ФИПИ.

Можно проанализировать, что нужно знать для успешного выполнения нового задания по теме векторы?

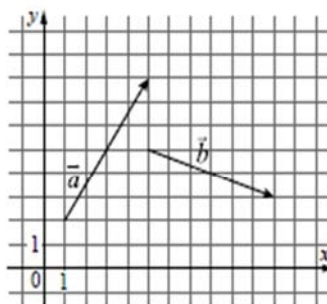
1. Определение координат вектора по координатам его начала и конца.
2. Определение длины вектора.
3. Операции над векторами в координатах.
4. Нахождение скалярного произведения векторов
5. Нахождение угла между векторами.

Так как тема «Векторы» всегда идет очень близко с темой «Метод координат» и эти темы рассматриваем на плоскости и в пространстве, обобщим основные понятия в формулы по данным темам в следующей таблице:

<u>На плоскости</u>	<u>В пространстве</u>
1. Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$ $AB =$ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
2. Координаты середины отрезка $\overline{AB}$ $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ $x = \frac{x_2 + x_1}{2}, y = \frac{y_2 + y_1}{2}$	$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$ $x = \frac{x_2 + x_1}{2}, y = \frac{y_2 + y_1}{2}, z = \frac{z_2 + z_1}{2}$

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2024 г. МАТЕМАТИКА, 11 класс. Профильный уровень. 5 / 23

2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Ответ: _____.

ИЛИ

Даны векторы $\vec{a}(1; 2)$, $\vec{b}(-3; 6)$ и $\vec{c}(4; -2)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Ответ: _____.

Рис 3.

3. Координаты вектора $\overline{AB}$

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

4. Длина вектора $\overline{AB}$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

5. Умножение вектора $\vec{a}$ на число k

$$\vec{a}\{x; y\} \Rightarrow k\vec{a} = \{kx; ky\}$$

$$\vec{a}\{x; y; z\} \Rightarrow k\vec{a} = \{kx; ky; kz\}$$

6. Сложение и вычитание векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2\}$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2\}$$

7. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

8. Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

9. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ или } x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ или } x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$$

10. Условие коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Приведем примеры типовых заданий по теме «Векторы» из открытого банка заданий ФИПИ [4]:

1. Даны векторы $\vec{a}(-13; 4)$ и $\vec{b}(-6; 1)$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

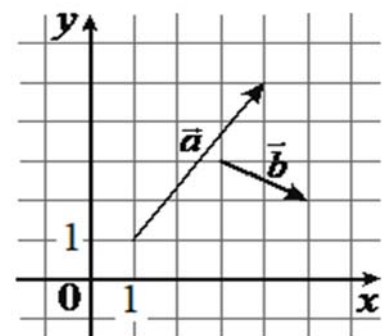
Ответ: 82

2. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 3 и 5, а угол между ними равен 60° . Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: 7,5

3. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 4), координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора $\vec{a} + 4\vec{b}$.

Ответ: 11



4. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 5), координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: 71

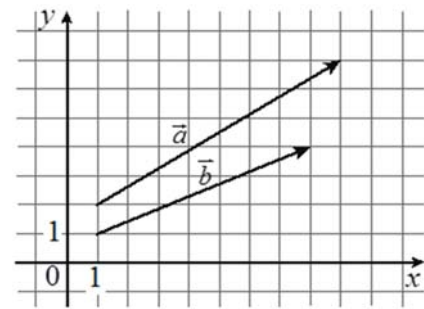


Рис. 5

На данный момент в банке ФИПИ нет разнообразия заданий. Поэтому по аналогии можно составить другие задания, изменить формулировки, усложнить условия и требования.

Приведем несколько примеров:

1. Дан вектор $\overline{AB}(5; 2)$, причем $B(7; 0)$. Найдите ординату точки А.

Ответ: 2

2. Найдите длину вектора $\vec{a}(5; -12)$.

Ответ: 13

3. Даны векторы $\vec{a}(-6; 9)$ и $\vec{b}(9; 1)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b}$.

Ответ: 17

4. Даны векторы $\vec{a}(-1; -4; 1)$ и $\vec{b}(-2; -6; 1)$. Найдите длину вектора $5\vec{a} - 3\vec{b}$.

Ответ: 3

5. Даны векторы $\vec{a}(3; 1)$, $\vec{b}(-5; 6)$ и $\vec{c}(-2; 4)$. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Ответ: 37

6. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 6), координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора $\vec{a} - 2,7\vec{b} + 0,4\vec{c}$.

Ответ: 1,1

7. Даны векторы $\vec{a}(-3; 7)$ и $\vec{b}(-2; -3)$. Найдите значение выражения $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: -15

8. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$, изображенных на (рис. 7).

Ответ: 82

9. Даны векторы $\vec{a}(1; 9)$ и $\vec{b}(-6; 0)$ и $\vec{c}(10, -2)$. Найдите значение выражения $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})$.

Ответ: 2

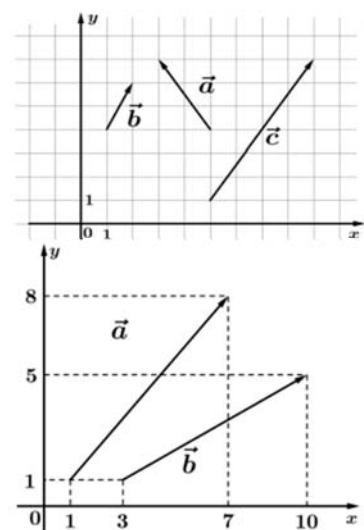


Рис. 7

10. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 8). Найдите значение выражения $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.

Ответ: 25

11. Даны векторы $\vec{a}(7; -1; 0)$ и $\vec{b}(1; 0; 1)$. Найдите косинус угла между ними.

Ответ: 0,7

12. Найдите синус угла между векторами $\vec{a}(1; -3; 0)$ и $\vec{b}(9; -3; 0)$.

Ответ: 0,8

13. Найдите скалярное произведение векторов $3\vec{a} + 5\vec{b}$ и $2\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a}(-1; 2; 0)$ и $\vec{b}(-2; 0; 2)$.

Ответ: -88

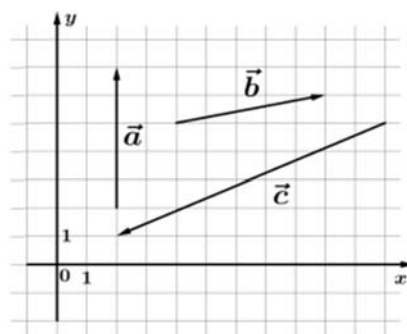


Рис. 8

Приобретение опыта работы с таким ключевым математическим понятием, как вектор, вооружит школьников достаточно эффективным способом решения многих задач, причем не только геометрических. Кроме того, это позволит учащимся полноценно подготовиться к выполнению задания 2 профильного уровня на государственных итоговых испытаниях по математике в 2024 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ященко И. В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень : типовые экзаменационные варианты : 36 вариантов. М. : Нац. образование, 2024.
2. Зыкова Е. Э. Некоторые подходы к преподаванию геометрии в инновационных школах // Проблемы учебного процесса в инновационных школах : сб. науч. тр. / под ред. О. В. Кузьмина. Иркутск, 2019. С. 82–85.
3. Коваленко Е. С., Кузуб Н. М. Алгебраический подход к решению планиметрических задач // Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании : материалы XIII Всерос. науч.-практ. конф. / под общ. ред. З. А. Дулатовой. Иркутск, 2020. С. 102–106.
4. Официальный сайт «ФИПИ». URL: <https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!tab/151883967-2> (дата обращения: 16.03.2024)
5. Образовательный портал для подготовки к экзаменам Решу ЕГЭ. URL: <https://ege.sdangia.ru/test?theme=182> (дата обращения: 16.03.2024).

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Начиная с древних времён математика активно развивается и не прекращает своё развитие и по сей день. Одним из важнейших открытий стало появление теории дифференциального исчисления, которое активно развивалось в том числе в период с XVII по XIX в. За прошедшие 300 лет было открыто множество различных теорем, которые позволяли развить учение об теории бесконечно малых. Одними из таких теорем являются теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши, которые как не трудно понять носят названия своих авторов. Данная статья посвящена рассмотрению ряда задач, которые помогут читателю углубить свои знания по математическому анализу и подробнее понять идею и содержание данных теорем.

Рассмотрим формулировки теорем и геометрический смысл каждой из них.

Теорема Ферма. Пусть функция $f(x) \in C_{[a,b]}$ и в точке $\xi \in (a;b)$ принимает свой *max* (*min*). Если функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке ξ , то $f'(\xi) = 0$.

Рассмотрим её геометрический смысл: пусть функция $y = f(x)$ принимает в точке $x = \xi$ свой *max* (*min*), тогда в точке $x = \xi$ касательная к графику функции параллельна оси абсцисс. (рис. 1).

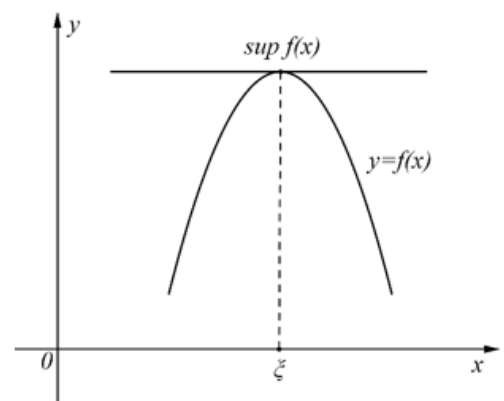


Рис. 1

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x) \in C_{[a,b]}^I$ и $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists \xi \in (a;b): f'(\xi) = 0$.

Геометрический смысл: пусть дана функция $y = f(x) \in C_{[a,b]}^I$ и $f(a) = f(b)$, тогда $\exists x = \xi$, в которой касательная параллельна оси абсцисс (рис. 2).

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x) \in C_{[a,b]}^I$. Тогда

$$\exists \xi \in (a;b): f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (\text{формула конечных приращений Лагранжа}).$$

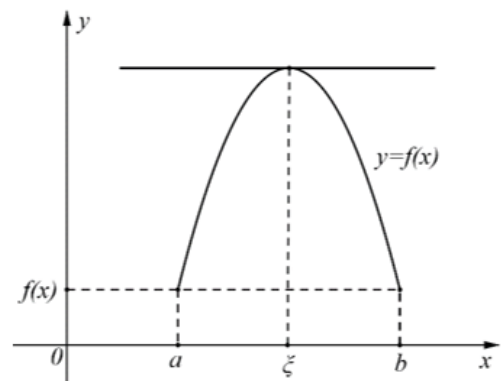
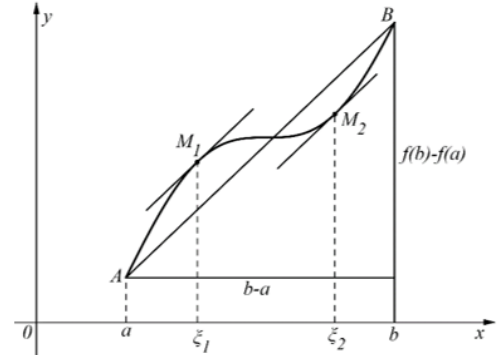


Рис. 2

Геометрический смысл: рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ – концы графика функции $y = f(x)$, AB – хорда. Тогда по определению производной $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \operatorname{tg} \beta$, где β – угол между хордой AB и осью Ox .

Производная $f'(\xi)$ равна тангенсу угла между касательной к графику функции $y = f(x)$ и положительным направлением оси Ox : $f'(\xi) = \operatorname{tg} \alpha$. Получаем, что: $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$, следовательно, теорема Лагранжа показывает, что в $(a; b)$ должна найтись точка $x = \xi$ в которой, касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна хорде AB (рис. 3).



Следствие 1. Пусть функция $y = f(x) \in C^1_{[a;b]}$ имеет $\forall x \in (a; b) f'(x) = 0$, непрерывна на концах промежутка, тогда функция $y = f(x) = C$ на промежутке.

Следствие 2. Пусть функции $y = f(x) \in C^1_{[a;b]}$, $y = g(x) \in C^1_{[a;b]}$ имеют $\forall x \in [a; b] f'(x) = g'(x)$, тогда: $f(x) - g(x) = C$.

Теорема Коши. Если функции $f(x) \in C^1_{[a;b]}$, $g(x) \in C^1_{[a;b]}$, причём $g'(x) \neq 0$, то $\exists! x = \xi \in (a; b): \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. (формула конечных приращений Коши).

Замечание: По условию теоремы, данная формула имеет смысл при $g(b) \neq g(a)$, в противном случае, функция $y = g(x)$ удовлетворяла бы теореме Ролля, по которой нашлась бы точка $x = \xi$, в которой $g'(x) = 0$.

Замечание: Формулу

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

называют *формулой конечных приращений Коши*.

Геометрический смысл: пусть дана переменная t , параметрическая функция $\vec{r}(g(t); f(t))$, описывающая некую линию. Когда переменная t пробегает $[t_1; t_2]$, получаем, что точка пробегает дугу с начальной точкой $(g(t_1); f(t_1))$ и конечной $(g(t_2); f(t_2))$. Соединив их, получим хорду, угловой коэффициент которой равен: $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{g(t_2)-g(t_1)}$. Производная $\vec{r}(g(t); f(t))$ равна $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$. Приравняв два условия, получаем:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{g(t_2)-g(t_1)},$$

где $t = \xi$ принадлежит $(t_1; t_2)$. Имеем, равенство угла наклона касательной и угла наклона хорды в точке $t = \xi$ (Рис. 3).

Для применения теорем на практике важно понимать не только смысл условия каждой теоремы, но и идею их доказательства. В следствии этого, полезно отрабатывать навык доказательства различных утверждений. Приведём несколько задач, самостоятельное доказательство которых поможет обучающемуся подробнее разобраться в изучаемой теории.

Докажите утверждения:

Задача 1. Теорема Ферма – частный случай теоремы Ролля.

Задача 2. Теорема Ролля – частный случай теоремы Лагранжа.

Задача 3. Теорема Лагранжа – частный случай теоремы Коши.

Далее рассмотрим задачи практического содержания.

В задачах 4 – 5 для функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ в точке $x = \xi$, в которой $y = f(x)$ принимает $\max$ или $\min$, примените теорему Ферма.

Задача 4. $f(x) = 5 - x^2$, $\xi = 0$.

Решение. Функция $f(x) = 5 - x^2 \in C^1_{[a; b]}$. В точке $x = \xi = 0 \exists f'(x) = -2x$. Функция $f(x) = 5 - x^2$ в точке $x = \xi = 0$ принимает $\max$. Все условия теоремы выполнены. Имеем, что $f'(\xi) = -2 \cdot 0 = 0$. Теорема применима.

Задача 5. $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, $\xi = 0$.

Решение. Функция $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \in C_{[a; b]}$, но $f(x) \notin C^1_{[a; b]}$. В точке $x = \xi = 0$ производная $f'(x) = \frac{-2x}{x^3 + x}$ не существует. Не все условия теоремы выполнены. Теорема не применима.

В задачах 6–7 для функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ примените теорему Ролля.

Задача 6. $f(x) = \ln \sin(x)$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Решение. Функция $f(x) = \ln \sin(x) \in C^1_{\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]}$. На концах $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ функция $f(x)$ равна: $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\ln 2$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\ln 2$. Получили, что $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$. Все условия теоремы выполнены. Теорема применима.

Задача 7. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$, $x \in [-1; 1]$.

Решение. Функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} \in C_{[-1; 1]}$, но $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} \notin C^1_{[-1; 1]}$. На концах $[-1; 1]$ функция $f(x)$ равна: $f(-1) = 2$, $f(1) = 0$. Имеем: $f(-1) \neq f(1)$. Не все условия теоремы выполнены. Теорема не применима.

В задачах 8–9 для функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ примените теорему Лагранжа.

Задача 8. $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), x \in [1; 2]$.

Решение. Функция $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \in C_{[1; 2]}^1$. Все условия теоремы выполнены. Теорема применима.

Задача 9. $f(x) = \sqrt[5]{x^4(x-1)}, x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Решение. Функция $f(x) = \sqrt[5]{x^4(x-1)} \in C_{\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]}$, но

$f(x) = \sqrt[5]{x^4(x-1)} \notin C_{\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]}^1$. Не все условия теоремы выполнены. Теорема не применима.

В задачах 10–12 для функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ на $[a; b]$ примените теорему Коши (необходимо рассмотреть все случаи в каждой задаче).

Задача 10. $f(x) = e^{2x}, g(x) = -x^2, x \in [0; 2]$.

Решение. Имеем $f(x) = e^{2x} \in C_{[0; 2]}^1$ и $g(x) \in C_{[0; 2]}^1$. $\forall x \in (0; 2) g'(x) \neq 0$. Все условия теоремы выполнены. Теорема применима.

Если поменять функции местами, то видим, что условия теоремы не нарушаются. Теорема применима.

Задача 11. $f(x) = e^x, g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, x \in [-2; 2]$.

Решение. Имеем $f(x) = e^x \in C_{[-2; 2]}^1$ и $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \in C_{[-2; 2]}^1$.

$\exists x = 0 \in (-2; 2): g'(x) = 0$. Не все условия теоремы выполнены. Теорема не применима.

Если поменять функции местами, то условия теоремы не нарушаются. Получили, что теорема применима при $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ и $g(x) = e^x, x \in [-2; 2]$.

Задача 12. $f(x) = x^2 e^{x^2}, g(x) = x^2 + 1, x \in [-1; 1]$.

Решение. Имеем $f(x) = x^2 e^{x^2} \in C_{[-1; 1]}^1$ и $g(x) = x^2 + 1 \in C_{[-1; 1]}^1$.

$\exists x = 0 \in (-1; 1): g'(x) = 0$. Не все условия теоремы выполнены. Теорема не применима.

Если поменять функции местами, то $\exists x = 0 \in (-1;1): f'(x) = 0$. Не все условия теоремы Коши выполнены. Теорема не применима.

В заключение хочется отметить, что изучение теорем Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши играет важную роль в понимании ключевых аспектов дифференциального исчисления. Они показывают читателю, как именно раскрывается смысл таких понятий, как «непрерывная дифференцируемая функция», «касательная» и «производная», которые вызывают у обучающихся существенные затруднения и являются базовыми для тех учеников, которые в дальнейшем будут изучать математику в высших учебных заведениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артемьева С. В., Курьякова Т. С., Чупрова Е. В. Обучение школьников элементам математического анализа в классах разных профилей // Повышение профессионального мастерства педагогических работников в России: вызовы времени, тенденции и перспективы развития : материалы Всерос. с междунар. участием практ. Конф., посвящ. 110-летию Педагогического института. Иркутск, 2019. С. 61–66.
2. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа для втузов. М. : Наука, 1967. 736 с.
3. Мерзляк А. Г., Номировский Д. А., Поляков В. М. Математика. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учебник : углубл. уровень : изд. в pdf-формате. 6-е изд., стер. М. : Вентана-Граф, 2019. 480 с.
4. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (проф. уровень). В 2 ч. Ч. 1.. 6-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2009. 424 с.
5. Пратусевич М. Я., Столбов К. М., Головин А. Н. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений : проф. уровень. М. : Просвещение, 2010. 463 с.

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С ЭЛЕМЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ» В МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОМ КОЛЛЕДЖЕ

Дисциплина «Дискретная математика с элементами математической логики» изучается студентами 2-го курса специальности «Информационные системы и программирование». В работе разбираются некоторые темы данной дисциплины и рассматривается их связь с другими предметами указанной специальности. Необходимые сведения можно найти в книгах [1–3].

Первой темой, которую мы рассмотрим, является тема «Упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований» из раздела «Алгебра высказываний». В текстах программ одними из основных операторов являются операторы «и», «или» и «если, то», которые соответствуют в формулах алгебры высказываний операциям «конъюнкция», «дизъюнкция» и «импликация». Поэтому умение упрощать формулы алгебры высказываний формирует у студентов навыки оптимизации программного продукта. Приведем пример упрощения одной из формул.

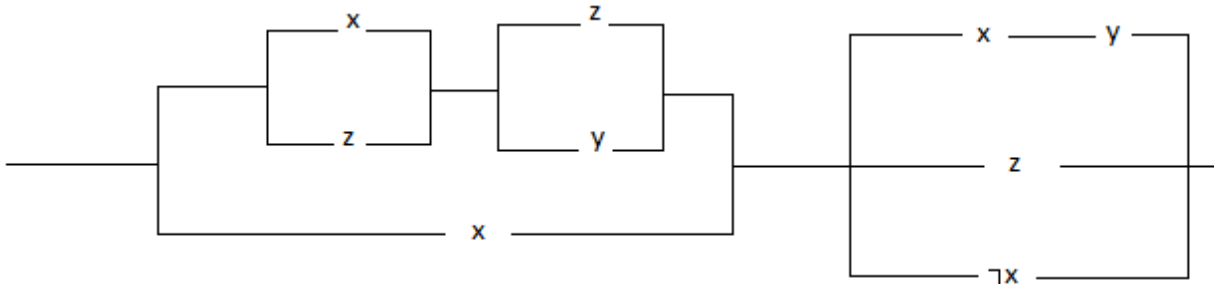
Пример 1. Пусть формула алгебры высказываний имеет вид:

$$(((X \rightarrow Y) \rightarrow \neg(X \vee Y)) \wedge X)$$

Меняем в формуле $(((X \rightarrow Y) \rightarrow \neg(X \vee Y)) \wedge X)$ импликацию на эквивалентные формулы, использующие отрицание и дизъюнкцию. Получим $((\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(X \vee Y)) \wedge X)$. Внесем отрицание в скобки, учитывая, что при этом конъюнкция меняется на дизъюнкцию: $((X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)) \wedge X$. Пользуясь законом дистрибутивности, вынесем $\neg Y$ за скобки. Получим эквивалентную формулу $((X \vee \neg X) \wedge \neg Y) \wedge X$. Далее, пользуясь законом поглощения, получим окончательную формулу $(\neg Y \wedge X)$.

Еще одной задачей, связанной с только что рассмотренной задачей, является задача упрощения релейно-контактных схем. Она заключается в следующем. Релейно-контактная схема состоит из переключателей, последовательно или параллельно, соединенных между собой. При этом по любой релейно-контактной схеме можно однозначно построить соответствующую ей формулу алгебры высказываний: последовательному соединению отвечает конъюнкция, а параллельному – дизъюнкция. Затем построенная формула упрощается, и по упрощенной формуле строится упрощенная релейно-контактная схема. Приведем следующий пример.

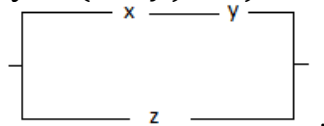
Пример 2. Упростить блок-схему.



Составим формулу, соответствующую данной блок-схеме:

$$(((x \vee z) \wedge (z \vee y)) \vee x) \wedge ((x \wedge y) \vee z \vee \neg x).$$

Вынесем из двух первых скобок z , получим $((x \wedge y) \vee z) \vee x) \wedge ((x \wedge y) \vee z \vee \neg x)$. Далее, вынесем скобку $(x \wedge y) \vee z$. Таким образом, исходная формула эквивалентна формуле $((x \wedge y) \vee z) \vee (x \wedge \neg x)$. Сократив последнюю формулу на противоречие $(x \wedge \neg x)$, получим окончательный результат: исходная формула эквивалентна формуле $(x \wedge y) \vee z$. Последней формуле соответствует релейно-



контактная схема:

Таким образом, приобретенное студентами умение упрощать формулы алгебры высказываний способствует лучшему усвоению тем и решению задач дисциплины «Основы алгоритмизации и программирования».

Еще одной темой, связанной с другими дисциплинами специальности «Информационные системы и программирование» является тема «Бинарные отношения и их свойства» раздела «Основы теории множеств». Бинарными отношениями, которые мы будем рассматривать, являются отношения эквивалентности и порядка на множестве строк.

Пусть M – множество строк вида $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, где i изменяется от 1 до m . Здесь элементы a_{ik} могут быть числами или любыми другими символами. Определим отношение ρ следующим образом. Зафиксируем номер k , лежащий между 1 и n . Пара $\langle A_i, A_j \rangle$ принадлежит ρ тогда и только тогда, когда $a_{ik} = a_{jk}$. Для отношения ρ требования рефлексивности, симметричности и транзитивности выполняются, поэтому это отношение является отношением эквивалентности.

Если множество M таково, что для данного k нет двух строк с равными элементами, то каждая строка будет эквивалентна только себе и множество классов эквивалентности будет равно количеству строк. Приведем пример, когда это не так.

Пример 3. Пусть $m=7$, $n=5$, а $k=3$, т. е. $M = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}$, причем $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, x, a_{i4}, a_{i5})$ для $i = 1, 3, 5, 7$ и $A_j = (a_{j1}, a_{j2}, y, a_{j4}, a_{j5})$ для $j = 2, 4, 6$. Тогда множество M состоит из двух классов эквивалентности: $M_1 = \{A_1, A_3, A_5, A_7\}$ и $M_2 = \{A_2, A_4, A_6\}$.

Заданная таким образом эквивалентность согласуется с некоторыми понятиями теории баз данных. При этом строки отвечают записям в таблицах баз данных, а элементы строк – полям в записях. Тогда выделенные элементы, по которым сравниваются строки, можно считать ключевыми полями записей. Ключевые поля могут быть составными, т. е. состоять из нескольких полей. Тогда в строках это будет соответствовать нескольким выделенным элементам, для которых отношение эквивалентности определяется аналогичным образом.

Итак, рассмотренная тема связывает нашу дисциплину с дисциплиной «Основы проектирования баз данных» специальности «Информационные системы и программирование». Заметим, что определение эквивалентности строк по совпадающим компонентам используется также в разработке поисковых систем.

Кроме отношения эквивалентности на множестве строк можно определить отношение порядка. Одним из наиболее часто используемых порядков на множестве строк является отношение лексикографического порядка. Оно определяется следующим образом. Пусть все элементы, входящие в строки принадлежат некоторому линейно упорядоченному множеству. Тогда $A_i > A_j$, если у A_i первый несовпадающий слева элемент больше, чем у A_j .

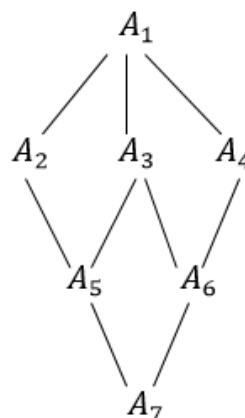
Пример 4. Пусть $A_1 = (2, 3, 5, 4, 7)$, $A_2 = (2, 2, 3, 1, 5)$, $A_3 = (1, 7, 8, 3, 5)$, $A_4 = (4, 4, 4, 5, 7)$, $A_5 = (4, 4, 5, 8, 9)$. Тогда $A_3 < A_2 < A_1 < A_4 < A_5$.

Лексикографическое упорядочение строк является линейным, т. е. таким, при котором любые две строки сравнимы. Такое упорядочение также используется при проектировании баз данных, с помощью него упорядочиваются записи в таблицах.

Кроме линейного порядка существуют различные частичные порядки, например, решеточный порядок. Решеточным, например, является порядок, определяемый следующим образом: $A_i > A_j$, если все элементы i -ой строки больше всех элементов j -ой строки.

Пример 5. Пусть $A_1 = (8, 9, 8, 9, 8)$, $A_2 = (7, 6, 7, 6, 7)$, $A_3 = (6, 7, 6, 7, 6)$, $A_4 = (7, 7, 6, 6, 7)$, $A_5 = (3, 4, 3, 4, 3)$, $A_6 = (4, 3, 4, 3, 4)$, $A_7 = (1, 2, 1, 2, 1)$. Тогда для определенного выше порядка $A_1 > \{A_2, A_3, A_4\} > \{A_5, A_6\} > A_7$, а строки A_2, A_3, A_4 несравнимы, также как и строки A_5, A_6 . Построенный порядок можно изобразить в виде решетки.

Итак, разобранные нами примеры показывают, что темы дисциплины «Дискретная математика с элементами математической логики» помогают студентам в освоении других предметов специальности «Информационные системы и программирование».



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спирина М. С., Спирин П. А. Дискретная математика. М. : Академия, 2020. 288 с.
2. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М. : Физматлит, 2006. 256 с.
3. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М. : Наука, 1984. 320 с.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В своей практике приходится сталкиваться с трудностями учеников при решении геометрических задач. На вопрос «Какие задачи в математике самые трудные?» многие ученики отвечают «геометрические». Почему? Попытались ответить на этот вопрос и пришли к выводу. При решении геометрической задачи необходимо правильно выстроить чертеж по условию задачи, понять, что нужно найти и какие для этого нужны данные. И, конечно, основное правило и самое, наверное, главное – чтобы научиться решать геометрические задачи, нужно решать их с карандашом в руках.

Проанализируем некоторые 18-е задачи из вариантов ОГЭ по математике 9-го класса. Это задачи с готовыми чертежами на клетчатом поле. Задачи на нахождение площадей фигур, нахождение углов, вычисление расстояний.

Нахождение расстояния от данной точки на плоскости – один тип задач. При решении таких задач требуется умение построения перпендикуляра от точки до прямой (отрезка). При этом клетки – наши помощники и сторона клетки оговорена в задаче (рис. 1, 2).

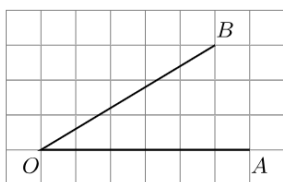


Рис. 1

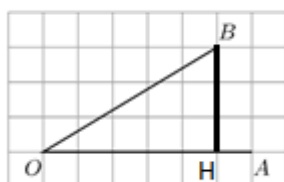


Рис. 2

Ответ: $BH = 3$

Этот же чертеж используем для нахождения $\operatorname{tg} AOB$. Для успешности решения этой задачи необходимо помнить определение тангенса острого угла – отношение противолежащего катета к прилежащему катету прямоугольного треугольника (рис. 3).

Ответ: $\operatorname{tg} AOB = \frac{3}{5} = 0,6$

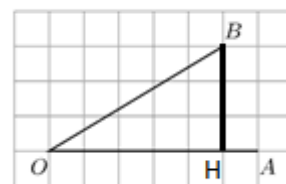


Рис. 3

Также можно по одному и тому же чертежу отработать нахождение площади треугольника OBN:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7,5$$

Если же это отрезок невозможно посчитать по клеткам (рис. 4) (т. е. этот отрезок не целочисленная величина), то приходится применять теорему Пифагора (рис. 5).

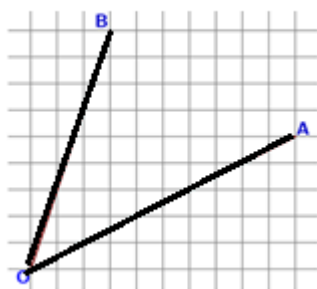


Рис. 4

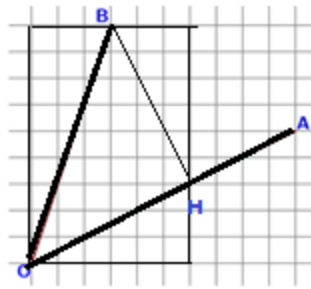


Рис. 5

Получим $BH = \sqrt{45}$ $OH = \sqrt{45} \operatorname{tg} \angle AOB = 1$. Можно сразу найти и площадь треугольника OBN, ведь для этого всё уже найдено: $S = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot BH = 22,5$.

В задании 18 часто встречаются задачи на нахождение $\sin \alpha$ или $\cos \alpha$ острого угла прямоугольного треугольника. На этом этапе можно предложить обучающимся их найти. Для этого можно наводящими вопросами подвести к тому, что треугольник равнобедренный, следовательно $\angle O = \angle B = 45^\circ$, а их синус и косинус равен $1/\sqrt{2}$. Предложить найти их значения через определения синуса и косинуса.

На следующем этапе практикуем нахождение радиуса описанной окружности по формуле

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Ответ: $R = \sqrt{22,5}$

Один из приемов решения геометрических задач – это задача с уже готовым ответом. Обучающиеся ищут пути ее решения, добиваясь нужного результата.

Независимо от пути выбора решения геометрической задачи нужны знания теорем и умения их применять. Теоремы и основные геометрические определения – надежные помощники для обучающихся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мордкович А. Г. Геометрические задачи на плоскости. М. : Школа-Пресс, 1995. 80 с.
2. Смирнова И., Смирнов В. Геометрия на клетчатой бумаге. М. : Чистые пруды, 2009.

32 с.

ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ И УГЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

Решение стереометрических задач, как правило, вызывает затруднения у обучающихся. Это связано с рядом факторов. Во-первых, плохо развитое пространственное мышление и слабое знание теоретических основ геометрии [2]. Во-вторых, отсутствие необходимых конструктивных навыков, не позволяющее грамотно перенести данные задачи на соответствующий чертеж, т. е. неумение многих обучающихся правильно изображать как сами многогранники, так и грамотно выполнять построения внутри многогранников, опираясь на методы проектирования и свойства проекций. Хотя стоит отметить, что хорошо выполненный теоретически обоснованный чертеж по данным задачи является одним из определяющих условий её правильного решения. Все вышесказанное позволяет нам сделать вывод о том, что обучение школьников решению стереометрических задач – одно из актуальных направлений методики преподавания геометрии в школе.

Процесс решения стереометрической задачи, как и любой другой задачи в методике преподавания математики, состоит из четырех основных этапов: осмысление условия задачи; составление плана решения; осуществление плана решения и изучение найденного решения [1].

На первом этапе по осмыслению условия задачи происходит работа по вычленению данных задачи, определению требования задачи и построению изображения пространственной фигуры на плоскости на основе свойств параллельного проектирования.

На втором этапе осуществляется поиск плана решения задачи на основе аналогии, анализа или синтеза в зависимости от уровня сложности задачи, а также выбор метода решения задачи – геометрический, векторно-координатный, алгебраический и т. д.

На третьем этапе оформляется решение задачи на основе логических рассуждений (силлогизмов).

На последнем этапе выполняют проверку и исследование решения задачи, рассматривают наличие других способов её решения, составление аналогичных задач.

К основным типам стереометрических задач можно отнести следующие:

- вычисление углов между плоскостями, между прямыми, между прямой и плоскостью;
- вычисление расстояний между точками, от точки до прямой, от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми;
- вычисление объемов и площадей поверхностей многогранников и геометрических тел;
- построение сечений многогранников и вычисление их площадей;

- решение задач на комбинации многогранников и тел вращения.

Ниже рассмотрим примеры решения первых двух типов стереометрических задач.

Задача 1. В правильной треугольной пирамиде тангенсы двугранных углов при основании равны 3. Найти длину отрезка, соединяющего середину стороны основания с серединой противоположного ребра, если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{3}$ [4].

Решение

Пусть $ABCD$ – правильная пирамида (рис. 1). Сторона основания $AB = \sqrt{3}$. Изобразим искомое расстояние отрезком KM , а тангенс угла $\angle CKD$ по условию равен $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

1. $CK = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$, тогда по свойству медиан треугольника $KH = \frac{CK}{3} = \frac{1}{2}$, $CH = 1$.

2. Из соотношений в прямоугольном треугольнике: $DH = KH \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$.

3. По теореме Пифагора: $DK = \sqrt{KH^2 + DH^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

4. $AD = \sqrt{KA^2 + DK^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, тогда $CM = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

5. Найдем $\cos \angle MCK = \frac{CH}{CD} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

6. Рассмотрим треугольник ΔKMC . Используем теорему косинусов для нахождения отрезка KM : $KM^2 = KC^2 + MC^2 - 2 \cdot KC \cdot MC \cdot \cos \angle MCK = \frac{9}{4} + \frac{13}{16} - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{9}{4} + \frac{13}{16} - \frac{3}{2} = \frac{25}{16}$, $KM = \frac{5}{4}$.

Ответ: $KM = \frac{5}{4}$.

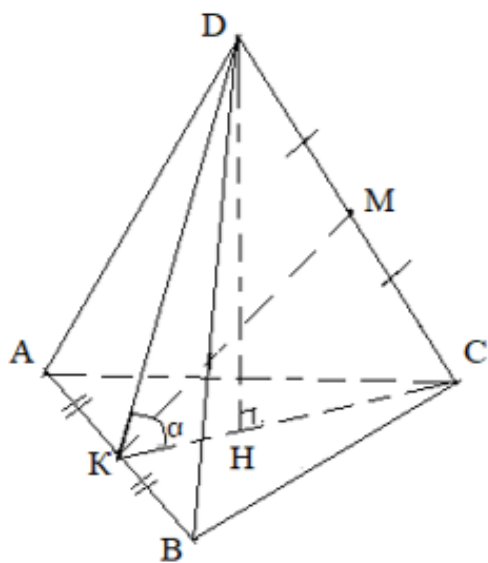


Рис. 1

Задача 2. В тетраэдре $ABCD$ ребра $AB = AC = 5$, $BC = AD = 4$, $BD = CD = 3$. Найти DM , где M – точка пересечения медиан грани ABC [4].

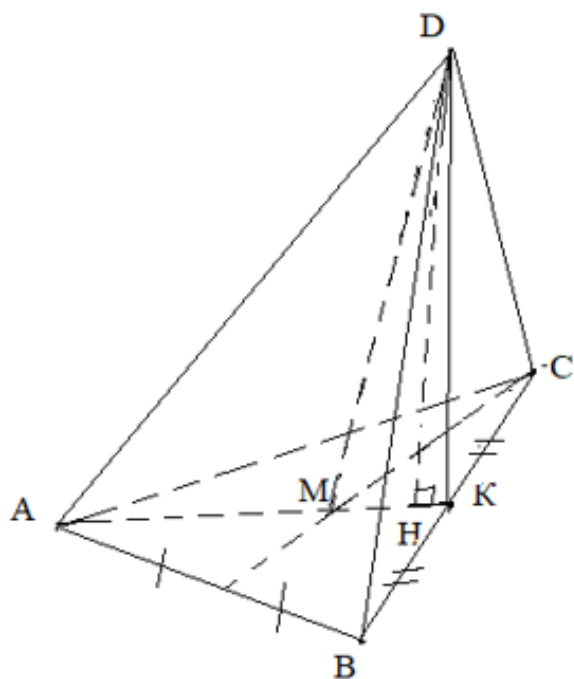


Рис. 2

Решение

По условию задачи грани ABD и ACD являются равными прямоугольными треугольниками, грани ABC и BCD – равнобедренными треугольниками. Вершина D тетраэдра проектируется в некоторую точку H, лежащую на медиане АК основания (рис. 2).

1. Рассмотрим треугольник $\triangle ABC$: по свойству равнобедренного треугольника и теореме Пифагора $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$. Тогда $AM = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3}\sqrt{21}$, $MK = \frac{\sqrt{21}}{3}$ (по свойству медиан треугольника).

2. Из треугольника $\triangle BDK$ по теореме Пифагора имеем:

$$DK = \sqrt{DB^2 - BK^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

3. Рассмотрим треугольник $\triangle ADK$: пусть $HK = x$, тогда $AH = \sqrt{21} - x$. Найдем длину высоты DH из треугольников $\triangle KHD$ и $\triangle DHA$:

$$DH^2 = 5 - x^2 = 16 - (\sqrt{21} - x)^2 \Rightarrow x = \frac{5}{\sqrt{21}} = \frac{5\sqrt{21}}{21}.$$

$$\text{Тогда } DH^2 = 5 - \frac{25}{21} = \frac{80}{21} \Rightarrow DH = \sqrt{\frac{80}{21}}.$$

$$4. \text{ Из треугольника } \triangle KHD \text{ имеем: } \cos \angle AKD = \frac{x}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{21}}.$$

5. По теореме косинусов для треугольника $\triangle MDK$ имеем:

$$DM^2 = 5 + \frac{21}{9} - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{21}}{3} \cdot \cos \angle AKD = 5 + \frac{7}{3} - \frac{10}{3} = 5 - 1 = 4,$$

$$DM = 2.$$

Ответ: $DM = 2$.

Задача 3. Основание пирамиды SABC – треугольник ABC со сторонами $AC = 10$, $BC = 24$, $AB = 26$. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найти: 1) радиус сферы, описанной около пирамиды SABC; 2) расстояние между прямыми SM и AC, SM и BC, где SM – высота пирамиды SABC [4].

Решение: Исходя из условия задачи треугольник $\triangle ABC$ – прямоугольный, так как $26^2 = 24^2 + 10^2$, $\angle ACB = 90^\circ$.

1. Пусть M – середина AB , по свойству медианы прямоугольного треугольника $AM = BM = CM = 13$. Точка M – центр окружности, описанной около $\triangle ABC$. По условию задачи все боковые ребра образуют с плоскостью основания пирамиды угол 45° . Тогда вершина пирамиды проектируется в точку M . Значит, высота пирамиды – SM (рис. 3). Следовательно, $\triangle ASB$ – равнобедренный прямоугольный треугольник, у которого $SM = AM = BM = 13$. Получается, что $SM = AM = BM = CM = 13$, т. е. точка M равноудалена от всех вершин пирамиды. Следовательно, M – центр сферы, описанной около пирамиды $ABCD$ с радиусом $R = 13$.

2. Из пункта 1 следует, что SM перпендикулярна плоскости основания пирамиды, тогда $SM \perp AC$, $SM \perp BC$, а это значит, что $\rho(SM, AC) = \rho(M, AC)$ и $\rho(SM, BC) = \rho(M, BC)$ (рис. 4).

Получаем $\rho(M, AC) = \frac{BC}{2} = 12$, $\rho(M, BC) = \frac{AC}{2} = 5$.

Ответ: 1) $R = 13$; 2) 12 и 5.

Задача 4. В правильной четырехугольной пирамиде угол между боковым ребром и плоскостью основания равен углу между боковым ребром и плоскостью боковой грани, не содержащей этого ребра. Найти этот угол [3].

Решение: Изобразим правильную пирамиду $PABCD$ и отметим на чертеже равные по условию задачи углы (рис. 5). Обозначим угол между ребром PA и плоскостью основания пирамиды и соответственно между этим же ребром и плоскостью грани PBC – α . Напоминаем, что углом между прямой и плоскостью считается угол между данной прямой и её проекцией на эту плоскость, т. е. $\angle PAC = \angle OKH = \alpha$. Причем, прямые AP и OK параллельны, и H – проекция точки O на плоскость грани PBC . Кроме этого, пусть сторона основания пирамиды $AB = a$ и высота пирамиды $PO = h$.

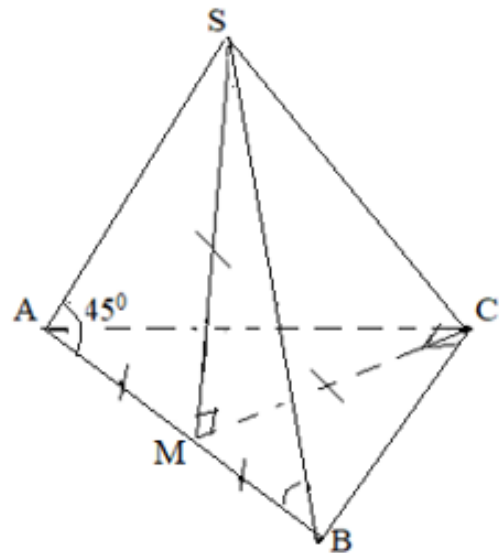


Рис. 3

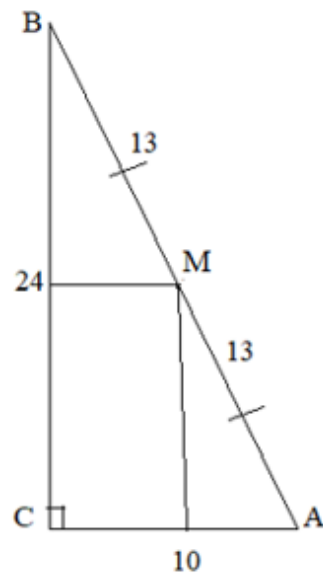


Рис. 4

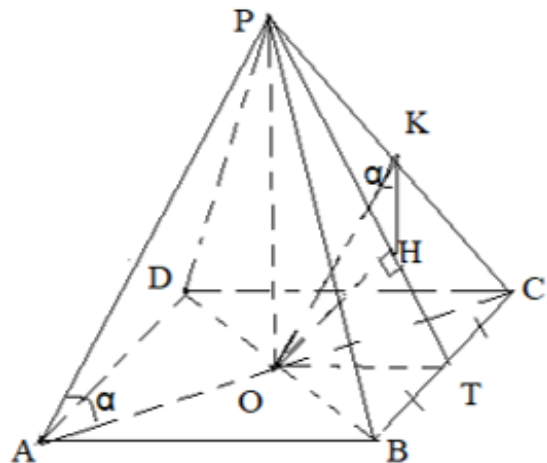


Рис. 5

1. Основанием пирамиды является квадрат, тогда если $AB = a$, то $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $OT = \frac{a}{2}$.

2. Треугольники $\triangle AOP \sim \triangle KNO$ (по двум углам) с коэффициентом подобия $k = 2$, так как $PA : KO = 2 : 1$ (по свойству средней линии треугольника).

3. Из прямоугольного треугольника $\triangle POT$ имеем: $OH = \frac{OT \cdot PO}{PT}$ (по свойству высоты, опущенной из вершины прямого угла).

4. По теореме Пифагора: $PT^2 = PB^2 - BT^2 = \left(\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2\right) - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + h^2$.

5. Учитывая подобие треугольников, получаем: $OH = \frac{\frac{a}{2} \cdot h}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}} = \frac{PO}{2} =$

$$\frac{h}{2} \Rightarrow \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

6. Тогда из треугольника $\triangle AOP$ имеем: $\cos \alpha = \frac{AO}{AP} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}}$

$$= \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{5a^2}{4}}} = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}. \text{ Получили } \alpha = \arccos \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{10}}{5}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Далингер В. А. Методика обучения учащихся стереометрии посредством решения задач : учеб. пособие. Омск : Изд-во ОмГПУ, 2001. 365 с.
2. Коваленко Е. С., Кузуб Н. М. Развитие пространственного мышления обучающихся посредством решения задач на комбинации многогранников // Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании : материалы XII Всерос. науч.-практ. конф., посвящ. 110-летию основания Педагогического института в г. Иркутске / под общ. ред. З. А Дулатовой. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2019. С. 143–146.
3. Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 288 с. (Б-ка мат. кружка).
4. Шарыгин И. Ф., Гордин Р. К. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. М. : Астрель : АСТ, 2001. 400 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

В школьном курсе геометрии рассматриваются различные методы решения планиметрических и стереометрических задач: поэтапно-вычислительный метод; векторно-координатный метод; метод площадей (объемов), метод геометрических преобразований и другие. Это обусловлено тем, что геометрические задачи допускают несколько способов их решения, в этом их преимущество и сложность одновременно. Поэтому возникает справедливый вопрос: какой метод выбрать, чтобы решение было более быстрым и рациональным?

Кроме методов, изучаемых в школе, существуют и другие, вполне доступные для учащихся методы решения таких задач. Например, применение элементов векторной алгебры к решению геометрических задач оправдано в тех случаях, когда условие задачи допускает введение системы координат. Это дает возможность действия над векторами заменить действиями над их координатами, и использовать, в полной мере, аппарат аналитической геометрии. Что в свою очередь, позволяет составлять уравнения прямых и плоскостей; вычислять углы между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью; находить расстояние между скрещивающимися прямыми, от точки до прямой или плоскости. А использование техники вычисления определителей третьего порядка дает возможность находить площади n -угольников и объемы некоторых многогранников. Таким образом, введение элементов высшей математики в решение некоторых метрических задач поможет сделать его более алгоритмизированным. Это сэкономит время и даст возможность решать геометрические задачи, вооружившись средствами алгебры, что является важным преимуществом при сдаче ЕГЭ.

Мотивацией к изучению элементов высшей математики (линейной алгебры, векторной алгебры, аналитической геометрии) у школьников должно быть формирование представления о возможностях решать задачи школьного курса геометрии проще и быстрее.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. Найти длину биссектрисы CD прямого угла $\angle C$ в прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AC = 2$ и $BC = 3$ [2].

Решение:

1-й способ.

Введем систему координат: $C(0,0)$ – начало координат, ось Ox направлена вдоль катета CB , ось Oy – вдоль катета CA (рис. 1).

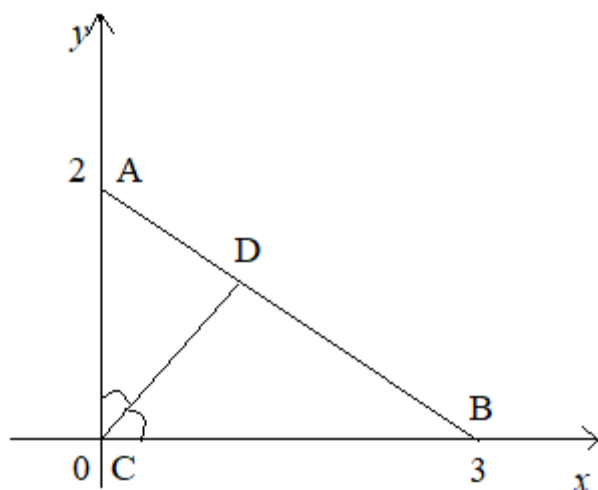


Рис. 1

Тогда $A(0,2)$, $B(3,0)$. Найдем уравнения прямых AB и CD :

CD : $y = x$ (биссектриса I координатного угла); AB : $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ (уравнение прямой в отрезках). Находим точку пересечения AB и CD , т. е. точку D из системы: $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{6}{5}$, следовательно, длина биссектрисы равна:

$$CD = \sqrt{\left(\frac{6}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{6}{5} - 0\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{2}}{5}.$$

2-й способ: Пусть точка D имеет координаты $(x; y)$, тогда в выбранной нами системе координат имеем: $\overrightarrow{CA}(0, 2)$; $\overrightarrow{CB}(3, 0)$; $\overrightarrow{CD}(x, y)$. Так как точка D делит отрезок AB в отношении $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$ (по свойству биссектрисы треугольника), то используем формулу деления отрезка в данном отношении и получаем:

$$\overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \left((0; 2) + \frac{2}{3}(3; 0) \right) = \frac{3}{5}(2; 2) = \left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right).$$

$$\text{Следовательно, } |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{2}}{5}.$$

$$\text{Ответ: } CD = \frac{6\sqrt{2}}{5}.$$

Задача 2. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1 , а боковая грань ACC_1A_1 является квадратом. Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 1$, $BC = 4$ [3].

Решение: При решении этой задачи поэтапно-вычислительным методом школьники используют два способа: либо строят плоскость, проходящую через одну из прямых параллельно второй, тогда искомое расстояние – это расстояние от какой-либо точки второй прямой до построенной плоскости; либо строят плоскость, проходящую через одну из прямых перпендикулярно второй, тогда

иское расстояние – это расстояние от точки пересечения второй прямой с плоскостью до первой прямой. Оба эти построения вызывают у обучающихся затруднение и часто бывают выполнены неверно. И это только часть задания, а на следующем шаге надо еще вычислить длину этого перпендикуляра.

Но можно решить эту задачу, не выполняя никаких построений. Достаточно найти уравнение плоскости α , проходящей через одну из прямых (например, AB_1) и параллельно второй (CA_1), используя уравнение плоскости. А затем найти расстояние от какой-либо точки прямой CA_1 до построенной плоскости α , используя формулу для нахождения расстояния от точки до плоскости.

Введем систему координат следующим образом: точка C_1 – начало координат, ось Ox направлена вдоль ребра C_1A_1 , ось Oy – вдоль ребра C_1B_1 , ось Oz – вдоль ребра C_1C (рис. 2).

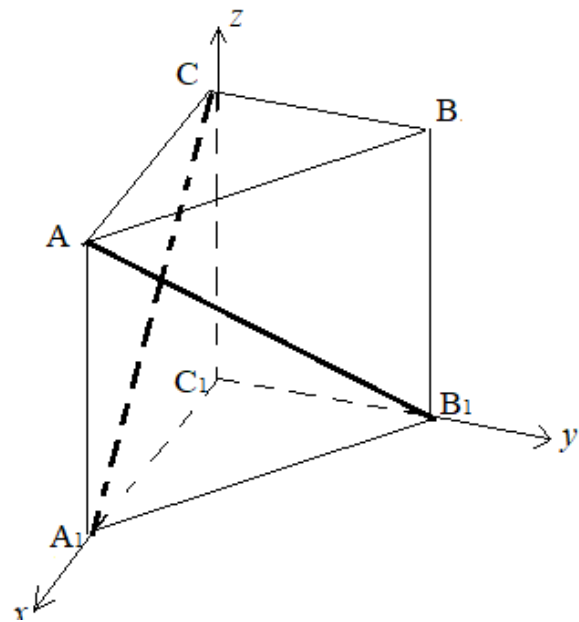


Рис. 2

Тогда вершины призмы будут иметь следующие координаты: $C_1(0; 0; 0)$, $A_1(1; 0; 0)$, $B_1(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $A(1; 0; 1)$, $B(0; 4; 1)$.

Чтобы найти уравнение плоскости α , воспользуемся условием компланарности векторов $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ и некоторого вектора $\overrightarrow{B_1M}$, лежащего в плоскости α (точка M – текущая точка плоскости α). Эти векторы имеют координаты $\overrightarrow{AB_1}(-1, 4, -1)$, $\overrightarrow{CA_1}(1, 0, -1)$ и $\overrightarrow{B_1M}(x, y-4, z)$. Так как они компланарны, их смешанное произведение равно нулю:

$$\begin{vmatrix} x & y-4 & z \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4x - 2(y-4) - 4z = 0.$$

Окончательно уравнение плоскости α примет вид: $2x + y + 2z - 4 = 0$.

Выше было сказано, что расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 – это расстояние от любой точки прямой CA_1 (например, C) до плоскости α . Воспользу-

емся формулой: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где (x_0, y_0, z_0) – координаты точки C ;

$Ax + By + Cz + D = 0$ – уравнение плоскости α . Тогда искомое расстояние равно:

$$d = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $d = \frac{2}{3}$.

Задача 3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найти угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 [5].

Решение: Вычисление угла между прямой и плоскостью обычным геометрическим методом вызывает затруднение у обучающихся, так как сначала необходимо построить проекцию этой прямой на указанную плоскость, а затем уже вычислить сам угол. Часто при построении проекции прямой допускают ошибку. Это связано с недостаточно развитым пространственным воображением и пробелами в знаниях стереометрической теории. Поэтому и эту задачу можно решить, не выполняя никаких построений. Достаточно найти уравнения плоскости ABC_1 и прямой AB_1 , а затем вычислить угол между ними, используя формулу угла между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой. Для этого введем систему координат следующим образом: точка D – начало координат, ось Ox направлена вдоль ребра DA , ось Oy – вдоль ребра DC , ось Oz – вдоль ребра DD_1 (рис. 3).

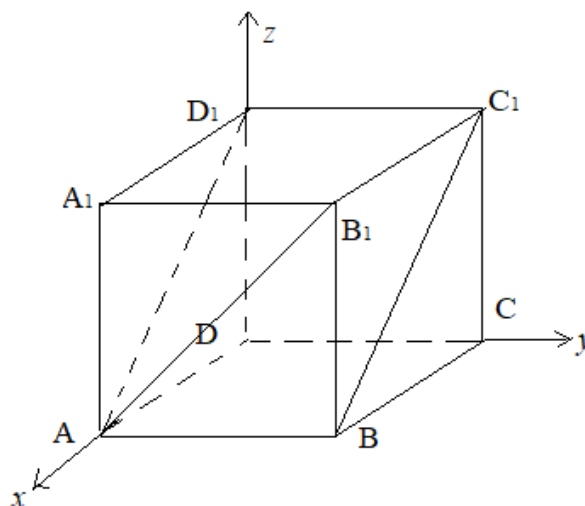


Рис. 3

Пусть ребро куба равно a . Тогда его вершины будут иметь следующие координаты:

$$A(a, 0, 0), B(a, a, 0), C(0, a, 0), D(0, 0, 0), A_1(a, 0, a), B_1(a, a, a), \\ C_1(0, a, a), D_1(0, 0, a).$$

Тогда вектор $\overrightarrow{AB_1} = (0, a, a)$. Это вектор, который направлен вдоль прямой AB_1 . Составим уравнение плоскости ABC_1 :

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ 0 & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix} = (x-a) \cdot a^2 + y \cdot 0 + z \cdot a^2 = 0 \Rightarrow x + z - a = 0.$$

Вектор $\vec{N}$, перпендикулярный плоскости ABC_1 , имеет координаты $\vec{N}(1, 0, 1)$. Для вычисления искомого угла воспользуемся формулой:

$$\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot \vec{N}|}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\vec{N}|} = \frac{0 \cdot 1 + a \cdot 0 + a \cdot 1}{\sqrt{0^2 + a^2 + a^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\varphi = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Вводить или не вводить элементы высшей математики в содержание учебного материала каждый учитель решает самостоятельно. Некоторые отдельные факты целесообразно рассматривать на уроках в качестве вычислительного инструментария, т. е. уделяя внимание практической составляющей обучения. Более глубокое изучение материала, включая теоретические сведения, возможно на

элективных курсах или курсах по выбору. Строгие построения и доказательства можно выносить на самостоятельное изучение в качестве тем для научно-исследовательской работы школьников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко Е. С., Кузуб Н. М. Обучение доказательству геометрических утверждений будущих учителей математики на основе таксономии Блума // Казанский педагогический журнал. 2023. № 2 (157). С. 67–74.
2. Новиков И. И. Метод площадей // Квант. 1971. № 12. С. 41–46.
3. Шарыгин И. Ф. Геометрия. 10–11 кл. : учеб. для общеобразоват. учеб. заведений. М. : Дрофа, 1999. 208 с.
4. Шарыгин И. Ф., Гордин Р. К. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. М. : Астрель : АСТ, 2001. 400 с.
5. Балаян Э. Н. Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ : 10–11 классы. Ростов-на-Дону : Феникс, 2013. 217 с.

К ВОПРОСУ ОБ ОБУЧЕНИИ ОСНОВАМ КРИПТОГРАФИИ В ВЫСШЕМ ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ

Усиление практико-ориентированной подготовки стало одним из принципов реформы высшего педагогического образования. Этот принцип декларируется в проекте Министерства просвещения России «Ядро высшего педагогического образования» [4]. Таким образом, содержание высшего педагогического образования должно включать в себя элементы, помогающие сформировать представление о прикладном значении науки в разных ее областях.

Содержание дисциплин «Теория чисел» и «Алгебра» для студентов педагогических направлений, как правило, достаточно сильно ограничено объемом дисциплины. Рабочая программа предметно-методического модуля для профиля «Математика» (в рамках проекта «Ядро педагогического образования») содержит примерную программу по теории чисел и алгебре, в которую аспекты, связанные с криптографией не включены. Тем не менее, мы считаем, что можно найти временные и методические ресурсы для организации знакомства будущих учителей математики с этими разделами, имеющими важное значение для мотивации обучающихся в силу значимости их приложений.

В рамках обобщающих занятий по дисциплинам «Теория чисел» и «Алгебра» представим некоторые задания по криптографии. Основные понятия криптографии и виды шифрования для студентов изложены в работах Л. М. Мартынова [2] и В. В. Яценко [1].

№	Наименование раздела/темы	Примеры использования в криптографии
1	Сравнение целых чисел	Аффинные и сдвиговые шифры. Шифры гаммирования. Криптосистема RSA с открытым ключом. Электронная подпись
2	Сравнения с одной переменной	Криптосистема с открытым ключом Эль-Гамала. Цифровая подпись Эль-Гамала
3	Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений	Шифр Хилла
4	Группы. Кольца. Поля	Аналог криптосистемы RSA с открытым ключом на эллиптических кривых. Протокол Диффи-Хеллмана открытого распределения ключей на эллиптических кривых

Примеры заданий

Аффинные и сдвиговые шифры

Задание 1. Пусть в русскоязычном тексте каждая буква алфавита сдвигается на 4 элемента вправо. Зашифруйте слово МАТЕМАТИКА.

Ответ: РДЦИРДЦМОД.

Задание 2. Зашифруйте высказывание М. В. Ломоносова

МАТЕМАТИКУ УЖЕ ЗАТЕМ УЧИТЬ НАДО, ЧТО ОНА УМ В ПОРЯДОК
ПРИВОДИТ

по следующему правилу: запишите данное высказывание наоборот и разбейте на четверки.

*Ответ: ЭТИД ОВИР ПКОД ЯРОП ВМУА НООТ ЧОДА НЬТИ ЧУМЕ
ТАЗЕ ЖУУК ИТАМ ЕТАМ.*

Шифры гаммирования

Один из способов гаммирования, в котором символы исходного текста и гаммы заменяются цифровыми эквивалентами, которые затем складываются по модулю k , где k – число символов в алфавите.

Задание 3. Зашифруйте слово КРИПТОГРАФИЯ на следующей гамме ИРОСНПНВРСТР, где мощность алфавита равна 30.

Решение.

Введем общие обозначения:

- исходное сообщение $X = (x_1, \dots, x_t)$ в алфавите $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$.
- n – мощность алфавита.
- каждая буква соответствует своему порядковому номеру в алфавите.
- шифртекст $Y = (y_1, \dots, y_t)$.

Выберем некоторую последовательность, составленную из букв Ω : $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ – данная последовательность называется *гаммой* шифра, или *ключевой последовательностью*.

Тогда каждая i -ая буква шифртекста $Y = (y_1, \dots, y_t)$ равна:

$$y_i = r_n(x_i + \gamma_i),$$

где $r_n(x_i + \gamma_i)$ – остаток от деления числа $x_i + \gamma_i$ на n .

Перейдем к самому процессу шифрования. Каждую букву исходного сообщения последовательно «накладываем» на гамму ИРОСНПНВРСТР, получаем:

$$\begin{array}{ll} y_1 = r_{30}(K + И) = r_{30}(10 + 9) = 19 - У, & y_7 = r_{30}(\Gamma + H) = r_{30}(4 + 13) = 17 - С, \\ y_2 = r_{30}(P + P) = r_{30}(16 + 16) = 2 - Б, & y_8 = r_{30}(P + В) = r_{30}(16 + 3) = 19 - У, \\ y_3 = r_{30}(И + О) = r_{30}(9 + 14) = 23 - Ч, & y_9 = r_{30}(А + Р) = r_{30}(1 + 16) = 17 - С, \\ y_4 = r_{30}(П + С) = r_{30}(15 + 17) = 2 - Б, & y_{10} = r_{30}(\Phi + С) = r_{30}(20 + 17) = 7 - Ж, \\ y_5 = r_{30}(Т + H) = r_{30}(18 + 13) = 1 - А, & y_{11} = r_{30}(И + Т) = r_{30}(9 + 18) = 27 - Ы, \\ y_6 = r_{30}(О + П) = r_{30}(14 + 15) = 29 - Ю, & y_{12} = r_{30}(Я + Р) = r_{30}(30 + 16) = 16 - Р \end{array}$$

Таким образом получилось слово: УБЧБАЮСУСЖЫР.

Легко заметить, что можно выполнить обратное действие. Зная гамму и полученное сообщение, можно легко найти исходное сообщение.

Криптосистема RSA с открытым ключом

Задание 4 [3]. Известно, что число 14197777 равно остатку от деления на 56887111 некоторого числа x , возведённого в куб. Числа x и 56887111 имеют общий делитель, отличный от 1, а число 56887111 является произведением двух простых чисел. Найдите хотя бы одно такое число x .

Решение: Пусть $y = 14197777, N = p \cdot q = 56887111, p, q$ – простые числа. По условию $\text{НОД}(x, N) = p > 1$. Так как $14197777 \equiv x^3 \pmod{N} \Rightarrow \text{НОД}(y, N) = p$.

Вычислим $\text{НОД}(y, N)$:

$$(56887111; 14197777) = (14197777, 96003) = (96003, 85336) = (85336, 10667) = (10667, 0) = 10667.$$

$p = 10667 \Rightarrow q = 5333, y = 1331 \cdot 10667$. И тогда получаем следующее уравнение:

$$1331 \cdot 10667 = t^3 \cdot 10667^3 \pmod{N} \quad | :10667$$

$$1331 = t^3 \cdot 10667^2 \pmod{N} = t^3 \pmod{q}$$

$$t^3 = 1331 \Rightarrow t = 11$$

$$x = t \cdot p = 11 \cdot 10667 = 117337$$

Ответ: 117337.

Шифр Хилла

Правило зашифрования: если $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – n -грамма открытого текста, $K = (k_{ij})$ – обратимая квадратная матрица порядка n над кольцом вычета Z_m (ключ) и $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ – n -грамма шифртекста, то $\bar{y} = K\bar{x}$, $\bar{x} = \bar{y}K^{-1}$, где K^{-1} – матрица, обратная к матрице K .

Следующая задача представляет собой шифрование из двух K ключей – A и B матриц. Правило зашифрования и расшифрования будет таким: $\bar{y} = \bar{x}A + B$, $\bar{x} = A^{-1}(\bar{y} - B)$.

Задание 5 (Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» «Информационная безопасность», 10-й класс, 2021–2022). Ключом в шифре Хилла является пара матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{Расшифровать сообщение РДОИШИЙЮЩЭ.}$$

Решение. Найдём обратную матрицу над Z_{33} (русский алфавит):

$\det A = 3 \cdot 9 - 1 \cdot 7 = 20$; $A_{11} = 9, A_{12} = -1 \equiv 32, A_{21} = -7 \equiv 26, A_{22} = 3$, так как мы расшифровываем над кольцом вычета Z_{33} , то

$$\det A^{-1} = a, \det A \cdot a \equiv 1 \pmod{33}, \text{ то } \det A^{-1} = 5, A^T = \begin{pmatrix} 9 & 26 \\ 32 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 26 \\ 32 & 3 \end{pmatrix} \cdot |A|^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 26 \\ 32 & 3 \end{pmatrix} \cdot 5 = \begin{pmatrix} 45 & 130 \\ 160 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 31 \\ 28 & 15 \end{pmatrix}.$$

Разобьем слово РДОИШИЙЮЩЭ на биграммы и оцифруем, т. е. определим $\bar{y}$:

Р	Д	О	И	Ш	И	Й	Ю	Щ	Э
17	04	15	09	25	09	10	31	26	30

Воспользуемся правилом расшифровки $\bar{x} = A^{-1}(\bar{y} - B)$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 31 \\ 28 & 15 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 12 & 31 \\ 28 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 31 \end{pmatrix}, \text{ аналогично для следу-}$$

ющих значений x . При получении элемента в матрице больше 32, требуется взять его остаток от деления по модулю 33.

Получаем $\bar{x} = (18, 31, 17, 17, 5, 0, 12, 9, 8, 13) = \text{СЮРРЕАЛИЗМ}$.

Ответ: СЮРРЕАЛИЗМ.

Представленные задачи раскрывают математические основы многих шифров, а их применение в разработке практических занятий для студентов удовлетворяют требованиям «Ядра высшего педагогического образования» к практико-ориентированной подготовки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Введение в криптографию / под общ. ред. В. В. Ященко. 4-е изд., доп. М. : МЦНМО, 2012. 348 с. URL: <https://library.eol.pw/UNSORTED/Kriptografia.pdf> (дата обращения: 18.02.2024).
2. Мартынов Л. М. Алгебра и теория чисел для криптографии. 3-е изд., стер. СПб. : Лань, 2024. 456 с. URL: <https://e.lanbook.com/book/362942> (дата обращения: 18.02.2024).
3. Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии: сайт. URL: <https://v-olymp.ru/cryptolymp> (дата обращения: 15. 09. 2024).
4. Ядро высшего педагогического образования. URL: <https://apkpro.ru/proekty/yadro-vysshego-pedagogicheskogo-obrazovaniya> (дата обращения: 15. 09. 2023).

РАЗРАБОТКА ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ ПО СОЗДАНИЮ УСЛОВИЙ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОГО ОБУЧЕНИЯ

Необходимо понимать, что предметы с двусторонними связями предполагают участие преподавателя, который проводит очень обширную подготовку. Это особенно важно потому, что преподавателю необходимо заранее определить многие базовые моменты:

- 1) планирование целей и задач урока с учетом взаимосвязей между дисциплинами;
- 2) подготовка вопросов для учеников, требующих применение и знаний из различных областей;
- 3) определение основных понятий;
- 4) формулировка мировоззренческих выводов, объединяющих факты и принципы из нескольких предметов;
- 5) включение в домашнее задание вопросов с междисциплинарным содержанием.

Междисциплинарные связи должны сочетаться с межпредметными связями. Междисциплинарные связи могут основываться не только на общих темах – объектах исследования, но и на методах мышления. На основе методов можно обеспечить единый принцип мышления, мышления в обучении эти принципы хорошо развиты, просты и понятны.

Основные принципы образования – научить учащихся учиться и пробудить интерес к определенной сфере деятельности, чтобы ученик реализовывал свои способности и интересы наиболее продуктивным образом для себя и для общества. Этот интерес поощряется собственным интересом учащегося и общественным мнением, что способствует саморегуляции. Законы мышления можно использовать для создания междисциплинарных связей. Эти законы одинаковы при изучении математики, информатики и других дисциплин. Мир целостен, и наше незнание приводит к его фрагментации.

Школьник начинает ощущать основу для собственного прогресса и развития, когда к нему приходит понимание законов мышления и умение отличать важное от второстепенного, истину от вымысла. Задача преподавателя – знать этапы применения междисциплинарных связей в образовательном процессе.

Всего существует три этапа:

1. Формирование умения применять междисциплинарные знания. На этой ступени основная цель учителя – научить ребенка использовать информацию из разных дисциплин. В средней школе ученики изучают родственные понятия из смежных предметов.

2. Второй этап особенно важен. Он включает в себя использование знаний, – когда ребенок самостоятельно применяет информацию и данные, полученные из разных научных дисциплин.

3. Заключительный этап – обобщающая ступень. Здесь главная задача учителя – научить детей использовать полученные данные, концепции, теории, законы для представления единства мира, использования общих диалектических принципов для объяснения образовательной модели междисциплинарных связей в рамках педагогического предмета. Необходимо привести два вида анализа содержания педагогического предмета: внутренний и внешний.

Внутренний анализ – это четкое логическое рассмотрение содержания какого-либо предмета с целью выявления элементов, формирующих основные положения между ними.

Внешний анализ подразумевает под собой изучение структуры и логики содержания смежных дисциплин с целью определения степени сходства их содержания с тематикой изучаемого предмета. Это позволяет нам определить основные междисциплинарные знания, которые необходимо применить, чтобы полностью понять основные концепции рассматриваемой темы. Поэтому важно определить область составных предметов из выбранного предмета исследования.

Критериями отбора могут быть:

- наибольшая значимость тем для раскрытия ведущих, основополагающих идей учебного предмета;
- высокая степень обобщения и интеграции разнородных знаний в содержании учебной темы.

Иногда предполагается объединить учебные темы с различными способами мышления, такими как диалектика и логика, что означает, что учащиеся обладают более высоким уровнем мышления, однако это возможно только при определенных обстоятельствах. Интеграция предметов может происходить на любом этапе учебного процесса.

- интеграция на уровне педагогических целей (ориентация на активность, самостоятельность, креативность);
- на уровне содержания (интегрированные уроки, программы, факультативы);
- на уровне сфер активности учащихся (экскурсии, проекты, конференции);
- педагогических технологий и т. д.

Изучение предметной области «Математика и информатика» должно обеспечить: осознание значения математики и информатики в повседневной жизни человека; формирование представлений о социальных, культурных и исторических 12 факторах становления математической науки; понимание роли информационных процессов в современном мире; формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления. В результате изучения предметной области «Математика и информатика» обучающиеся развивают логическое и математическое мышление, получают представление о математических моделях; овладевают математическими рассуждениями; учатся

применять математические знания при решении различных задач и оценивать полученные результаты; овладевают умениями решения учебных задач; развивают математическую интуицию; получают представление об основных информационных процессах в реальных ситуациях. Для продуктивного проведения междисциплинарного обучения применяют структуру, состоящую из шести ступеней. Она подходит для каждого класса.

1. Предварительное учебное планирование

В самом начале нужно спланировать алгоритм действий, который будет состоять из заметок и открытых вопросов. Это поспособствует организации учебного процесса.

2. Знакомство учеников с методикой

Междисциплинарное обучение отличается от привычного изучения школьной программы, именно поэтому важно показать, как междисциплинарный подход используется для устранения недостатков и улучшения обучающего процесса.

Необходимо пролить свет на основу междисциплинарного обучения и донести до учеников мысль, почему это так важно.

3. Внедрение в учебный процесс

Учителю нужно взять его с собой на уроки и научить детей правильному использованию идей каких-либо дисциплин. Начать необходимо с совместного обзора разделов с позиции междисциплинарного обучения.

4. Практикование междисциплинарного мышления

Поставьте ученикам задачу изучить вопрос, используя подход к конкретному предмету. Затем учащимся нужно будет применить полученную информацию из другой области, чтобы аргументировать свое исследование и найти верное решение.

Можно поделить учеников на микро-группы, это упростит взаимодействие участников и позволит взглянуть на тему более обширно, выявит больше точек зрения и мнений по конкретной теме.

Также полезным будет демонстрация итогов работы группой перед всем классом. Эксперты советуют в случае небольших коллективов учащихся подготовить материал для каждого урока, это позволит расширить исследование и более глубоко отразить междисциплинарный процесс.

5. Предоставление обратной связи

Объективно оцените работу учащихся по конкретной системе критериев. На этой ступени важно дать ученикам развернутую обратную связь об их умении оценивать аналитические аспекты различных дисциплин, применении знаний из этих дисциплин для составления всестороннего анализа. Эксперты рекомендуют следовать методологии «плюс-минус» при оценивании, чтобы точно определить области, требующие развития дополнительных навыков. Тесное сотрудничество преподавателя и учащихся может быть полезно тем студентам, которым необходимо освоить интеграционный элемент междисциплинарного обучения. Ваши оценки, комментарии и обратная связь помогут скорректировать и улучшить способность детей мыслить междисциплинарно на протяжении всего учебного процесса.

6. Оценивание учащихся

Расскажите ученикам, как самостоятельно и корректно оценивать какой-либо проект, задание, исследование. Поставьте перед ними задачу оценить собственные знания и способности.

6.1 выявить и применить различные дисциплины, относящихся к изучаемой проблеме.

6.2 синтезировать идей из различных дисциплин.

6.3 интегрировать идей между дисциплинами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральные государственные образовательные стандарты. URL: <https://fgos.ru/>
2. Метапредметный подход в преподавании математики. URL: <https://uchitelya.com/matematika/179979-metapredmetnyy-podhod-v-prepodavanii-matematiki.html>
3. Метапредметный подход в преподавании информатики. URL: <https://uchitelya.com/informatika/38249-metapredmetnyy-podhod-v-prepodavanii-informatiki.html>
4. Тюнников Ю. С., Крылова В. В. Интегративный подход к построению системы подготовки будущих педагогов к инновационной деятельности // Пед. образование и наука. 2015. № 5. С. 17–25. URL: <http://elar.uspu.ru/bitstream/uspu/5967/1/mon00087.pdf>
5. Радионова Д. Н. Личностно ориентированный подход: повышение мотивации к обучению // Нар. асвета. 2015. № 8. С. 86. URL: <https://www.n-asveta.by/dadatki/eshb/radionova.pdf>
6. Развитие метапредметных способностей на уроках. URL: <https://docviewer.yandex.ru>
7. Метапредметные результаты обучения по ФГОС. URL: https://pedsovet.su/fgos/6528_metapredmetnye_rezultaty_obucheniya
8. Сиренко С. Н. Расширение предметного поля учебной дисциплины на основе идей междисциплинарной интеграции (на примере дисциплины «Основы информационных технологий») // Инновац. образоват. технологии. 2013. № 3. С. 19–26. URL: http://media.miu.by/files/store/items/iot/35/iot_3_2013_3.pdf
9. Шмидт Х. Развитие Европейского пространства высшего образования и междисциплинарных программ обучения // Вышэйш. шк. 2016. № 2. С. 9–15. URL: https://elib.bsu.by/bitstream/123456789/173832/1/Шмидт_ВШ%202–2016–009-015.pdf
10. Сиренко С. Н. Образование как институциональный механизм перехода к устойчивому развитию // Вышэйш. шк. 2014. № 3. С. 47–52. URL: <https://elib.bsu.by/bitstream/123456789/150081/1/УР%20статья%20Сиренко.pdf>

К ВОПРОСУ ОБ ИЗУЧЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИИ В СТАРШИХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Из результатов проверки ЕГЭ по математике следует, что школьники достаточно сложно решают стереометрические задачи второй части профильного уровня.

Начнем с вопроса: «А зачем старшеклассникам нужно изучать стереометрию?». Давайте попробуем ответить на этот вопрос с учетом современной точки зрения.

Мы сталкиваемся с элементами стереометрии каждый день, чаще всего не осознавая этого. Мебель, бытовая техника и другие устройства в нашем доме имеют форму стереометрических тел или их частей. Здания, мосты и другие архитектурные сооружения имеют форму и объем, которые могут быть представлены в стереометрических моделях. Стереометрия играет важную роль в нашей повседневной жизни, хотя мы не всегда это замечаем. Изучение этого предмета нужно обучающимся для постижения основ будущей профессии, так как многие профессии, такие как архитектура, инженерное дело, дизайн и другие, требуют знания аксиом и теорем стереометрии. Рассмотрим дизайн интерьеров и мебели. Наверняка, родители многих учащихся обращались к дизайнерам, когда заказывали мебель на кухню, шкаф домой или интерьер квартиры. В этом случае стереометрия помогает дизайнерам создавать трехмерные модели мебели и интерьеров для лучшего понимания и визуализации проектов. Стереометрические модели также используются как в производстве, так и при обработке различных материалов, таких как металл, пластик, стекло и других. Эти модели являются основой для разработки и создания различных устройств и приборов.

В искусстве и кинематографии также используются стереометрические модели при создании трехмерных изображений для фильмов, игр и других мультимедийных проектов. С этим фактом школьники точно знакомы. Знание стереометрии помогает создавать более реалистичные и захватывающие сцены в кино, а также позволяет зрителям ощущать себя частью того, что происходит на экране. В компьютерных играх стереометрия также используется, например, для создания красивых игровых сцен, включающих леса, горы и другие объекты, которые используются игроками.

Таким образом, изучение стереометрии помогает развивать пространственное мышление обучающихся, которое является важным навыком для решения задач в различных областях их будущей деятельности.

Возникает вопрос, как развивать пространственное мышление школьников. Безусловно, нужно иметь развитое пространственное воображение у обучающихся, т. е. умение представлять объекты в трехмерном пространстве.

Пространственное воображение человека нужно развивать еще с детства. Поэтому важно с ребенком заниматься рисованием, лепкой, учить его делать что-

то своими руками, возможно с использованием конструктора. Эти занятия развивают воображение ребенка и помогают ему лучше представлять трехмерные объекты. Если школьник участвует в кружках и секциях по моделированию, конструированию или робототехнике, где обучающиеся могут создавать объемные модели самолетов, дронов или роботов, то это помогает ему развивать пространственное воображение и учит представлять трехмерные объекты.

В современном мире также существует множество компьютерных программ, которые позволяют создавать и редактировать трехмерные модели. Эти программы предназначены для создания 3D-моделей и анимаций. В них можно создавать свои модели и делиться ими с другими пользователями. Имеется также бесплатная математическая программа GeoGebra для всех уровней образования, включающая в себя раздел «Геометрия», в котором можно создавать трехмерные объекты, строить их сечения, либо строить их линии пересечения. Эта программа также помогает развивать пространственное воображение и навыки работы с трехмерными объектами.

Для развития пространственного мышления школьников можно использовать настольные игры, такие как шашки, шахматы, которые требуют планирования и предугадывания ходов противника. Также можно решать с детьми головоломки и различные задачи на развитие логики и пространственного мышления. Таким образом, если для развития пространственного мышления обучающихся одних занятий на уроках геометрии недостаточно, нужно использовать другие методы и приемы, в том числе из виртуальной реальности.

Пространственное мышление также играет важную роль и при изучении других учебных предметов, например, химии и физики. Использование разнообразных методов и приемов в учебном процессе поможет обучающимся развивать пространственное мышление и успешно применять его в различных областях практической деятельности.

Таким образом, изучение стереометрии дает обучающимся множество преимуществ. Оно помогает улучшить навык визуализации, развивать не только пространственное, но и логическое мышление, формировать аналитические способности. Это может быть полезным при решении различных практических и теоретических задач. В целом, изучение стереометрии – это интересный и творческий процесс, который помогает развивать воображение и креативность обучающегося.

Классификация задач в курсе стереометрии проводится не по методам решения, а по содержанию. В общем, чтобы решить стереометрическую задачу, помимо аксиом и теорем планиметрии, старшеклассник должен знать следующие понятия и теоремы стереометрии:

- 1) Признаки и свойства параллельных прямых и плоскостей.
- 2) Признаки и свойства перпендикулярных прямых и плоскостей.
- 3) Понятие угла между скрещивающимися прямыми.
- 4) Понятие угла между прямой и плоскостью.
- 5) Понятие угла между плоскостями.
- 6) Понятие расстояния от точки до прямой.
- 7) Понятие расстояния от точки до плоскости.

- 8) Понятие расстояния между скрещивающимися прямыми.
- 9) Построение сечений многогранника.
- 10) Формулы для нахождения площади поверхности и объема геометрических тел.

Также необходимо знать алгоритмы решения типовых стереометрических задач.

Именно по этим темам составлены задачи, включенные в Единый государственный экзамен по математике. Успешное освоение стереометрии повышает уверенность обучающегося в своих математических способностях, так как задачи по стереометрии способствуют развитию пространственного мышления, умению логически мыслить и помогают более глубокому усвоению всего школьного курса геометрии. Решение стереометрической задачи обычно сводится к решению планиметрической задачи, поэтому при изучении стереометрии приходится повторять теоремы и формулы планиметрии.

В заключение хотелось бы сказать школьникам, что нужно читать и смотреть фильмы о науке и технологиях. Чтение книг и просмотр фильмов на эту тему поможет вам лучше понять, как пространственное мышление используется в различных областях науки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Далингер В. А. Методика обучения учащихся стереометрии посредством решения задач : учеб. пособие. Омск : Изд-во ОмГПУ, 2001. 365 с.
2. Зыкова Е. Э. Некоторые подходы к преподаванию геометрии в инновационных школах // Проблемы учебного процесса в инновационных школах : сб. науч. тр. Иркутск, 2019. С. 82–85.
3. Коваленко Е. С., Кузуб Н. М. Обучение доказательству геометрических утверждений будущих учителей математики на основе таксономии Блума // Казанский педагогический журнал. 2023. № 2 (157). С. 67–74.

ИНВЕРСНЫЕ ОБРАЗЫ ЭЛЛИПСА

В конце XIX в/ немецкий математик Людвиг Иммануил Магнус стал рассматривать преобразование расширенной плоскости, которое получило название симметрии относительно окружности или *инверсии* (от лат. *inversio* – обращение). Зафиксируем на плоскости некоторую окружность с центром в точке O и радиусом R (эта окружность называется *окружностью инверсии*). Под инверсией плоскости относительно окружности ω (O, R) с центром в точке O и радиусом R понимают такое преобразование плоскости, при котором каждой точке A плоскости, отличной от точки O , ставится в соответствие точка A' на луче OA такая, что $OA \cdot OA' = R^2$ (рис. 1). На рисунке 1 указан способ построения образа точки A при инверсии относительно окружности ω (O, R). При этом центр инверсии O отображается в бесконечно удалённую точку O_∞ . Если точка A принадлежит окружности инверсии, то её образом будет сама точка A . Поэтому все точки, принадлежащие окружности инверсии, являются неподвижными, а сама окружность является инвариантной фигурой. Внутренние точки круга с границей ω (O, R) переходят во внешние, а внешние – во внутренние.

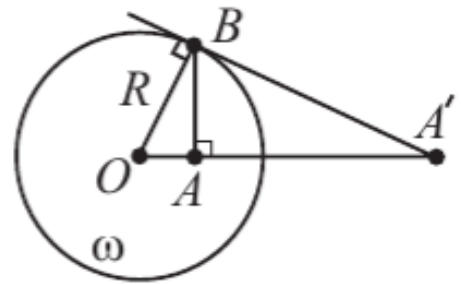


Рис. 1

Пусть радиус R окружности инверсии равен 1, её центр совпадает с началом координат. Тогда непосредственно из определения инверсии формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где точке $A(x; y)$ ставится в соответствие точка $A'(x'; y')$.

Рассмотрим инверсию эллипса, заданного в прямоугольной декартовой системе координат. Предположим, что эллипс сдвигается вдоль оси Ox на значение x_0 . Тогда уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x' - x_0)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

При этом учтем, что половина расстояния между фокусами $c^2 = a^2 - b^2$ ($a > b$) и $c^2 = b^2 - a^2$ ($b > a$).

Используя формулы преобразования координат (1), получим уравнение образа эллипса:

$$(x^2 + y^2)^2 + \frac{x^2}{(x_0^2 - a^2)} + \frac{a^2 y^2}{b^2(x_0^2 - a^2)} - \frac{2x_0 x(x^2 + y^2)}{(x_0^2 - a^2)} = 0. \quad (2)$$

Выясним, какие кривые задает уравнение (2), в зависимости от значений x_0 . Построим эллипс и его образ относительно единичной окружности в программах Excel и Desmos, при этом окружность инверсии выделим синим цветом, эллипс – красным, а его образ – зеленым цветом.

1. Если $x_0 = 0$, то при $a > b$ получаем кривую, симметричную относительно осей координат и вытянутую вдоль оси Oy (рис. 2).

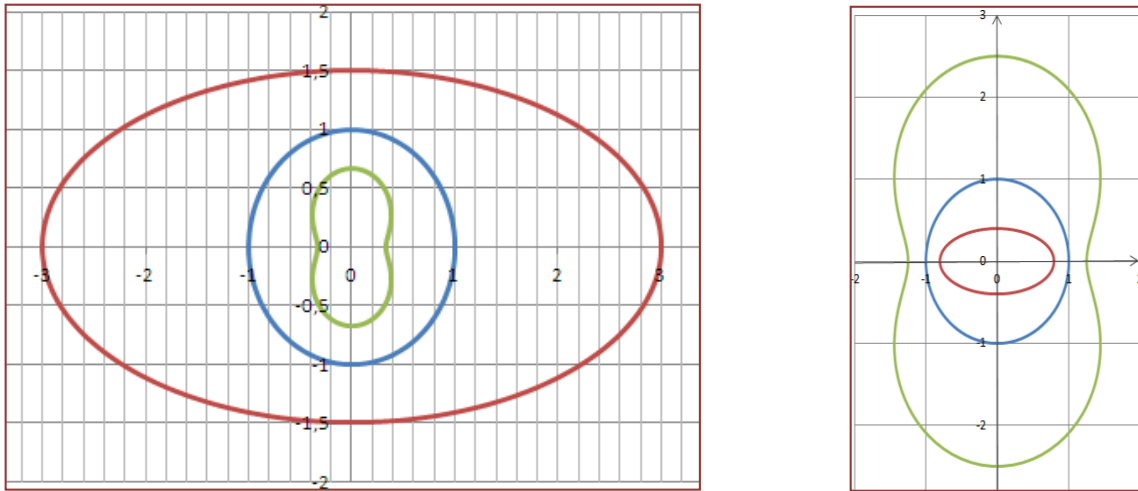


Рис. 2

При $a < b$ получаем кривую, симметричную относительно осей координат и вытянутую вдоль оси Ox .

2. Если $x_0 \in (0; R = 1]$, то получаем кривую, похожую на предыдущую, но симметричную уже только относительно оси Ox (рис. 3).

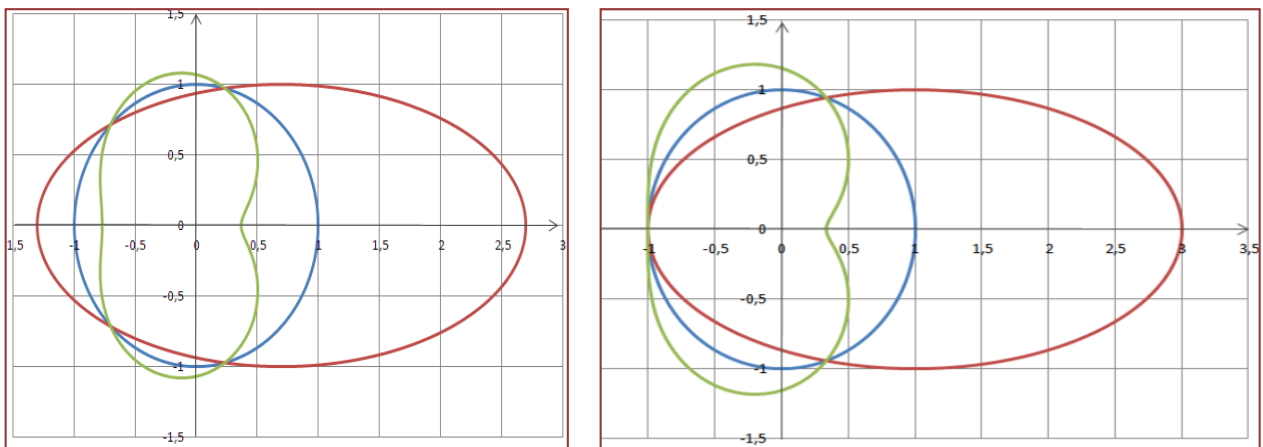


Рис. 3

3. Если $x_0 \in (R; a)/\{c\}$, то образом является кривая, похожая на улитку Паскаля (рис. 4).

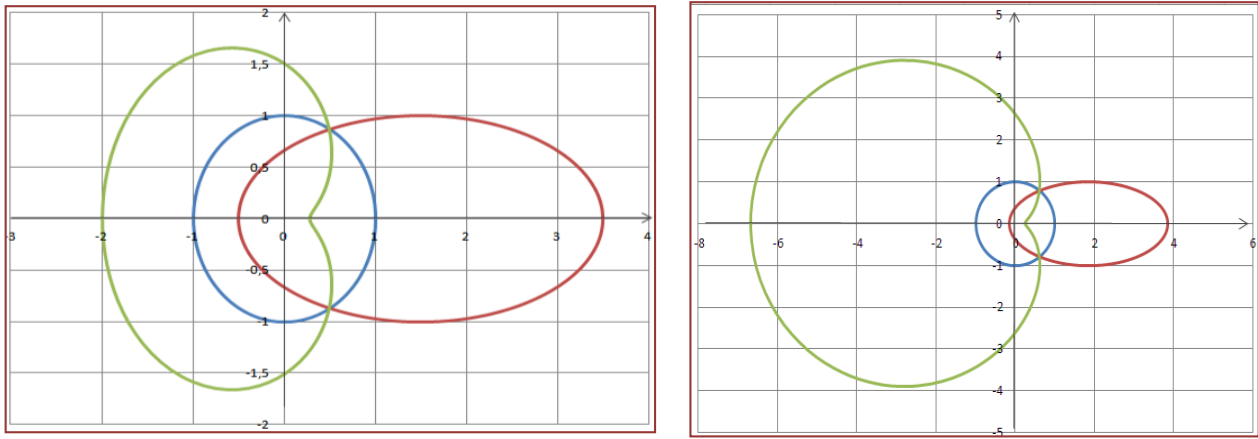


Рис. 4

По мере удаления центра эллипса от начала координат его образ становится всё более выпуклым.

4. Если $x_0 = c$, то образом является замечательная кривая, называемая улиткой Паскаля (рис. 5). Уравнение, задающее эту кривую, получено из уравнения (2) заменой x_0 на параметр c и имеет вид:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2mx(x^2 + y^2) + m^2x^2 = l^2(x^2 + y^2), \quad (3)$$

где $m = \frac{c}{b^2}$, $l = \frac{a}{b^2}$.

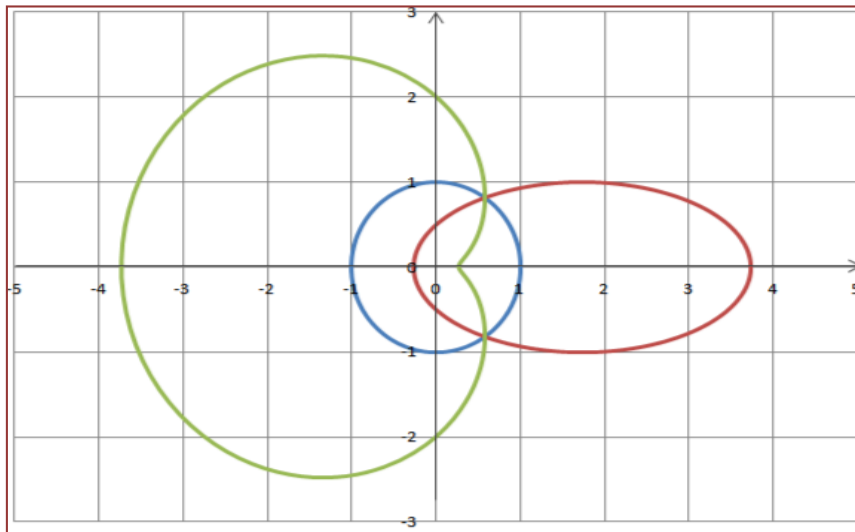


Рис. 5

5. Если $x_0 = a$, то эллипс проходит через начало координат, и его образом является кривая с изгибом у начала координат (рис. 6).

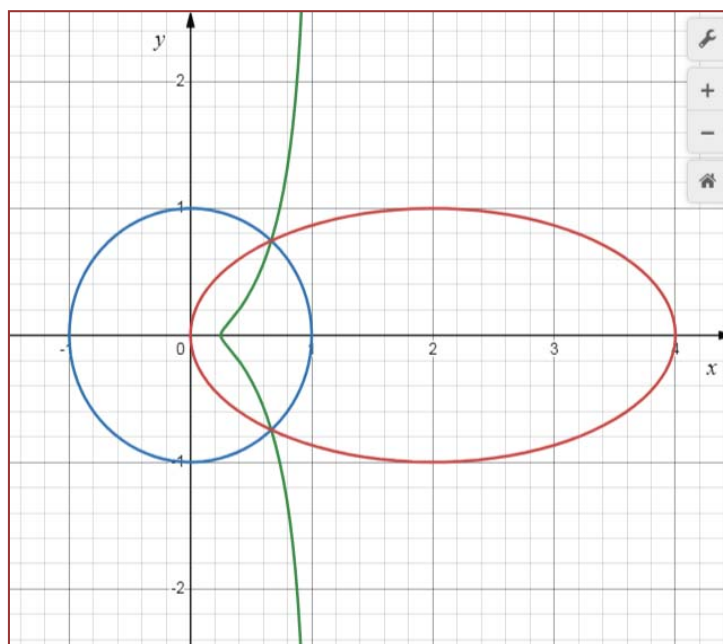


Рис. 6

6) Если $x_0 \in (a; +\infty)$, то образом является кривая каплевидной формы. По мере удаления центра эллипса от начала координат образ эллипса, наоборот, стремится к началу координат и уменьшается (рис. 7).

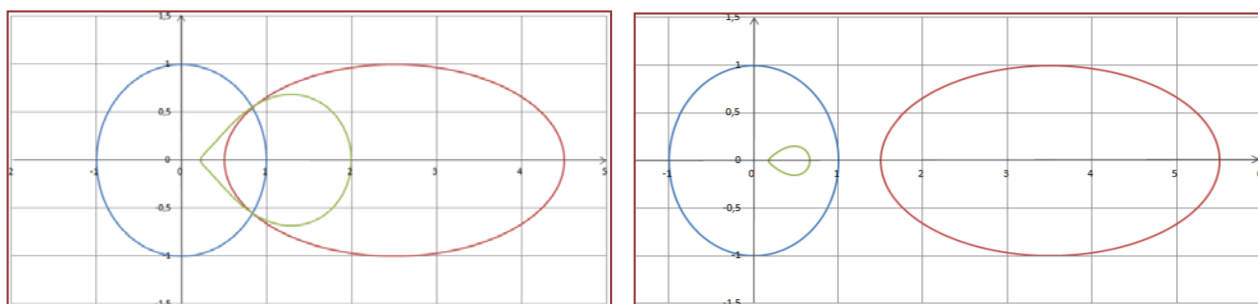


Рис. 7

Возможен второй случай, если $a < b$.

7. Если $x_0 \in (0; R]$, то образом является замкнутая кривая грушевидной формы. По мере удаления эллипса от начала координат его образ уменьшается (рис. 8).

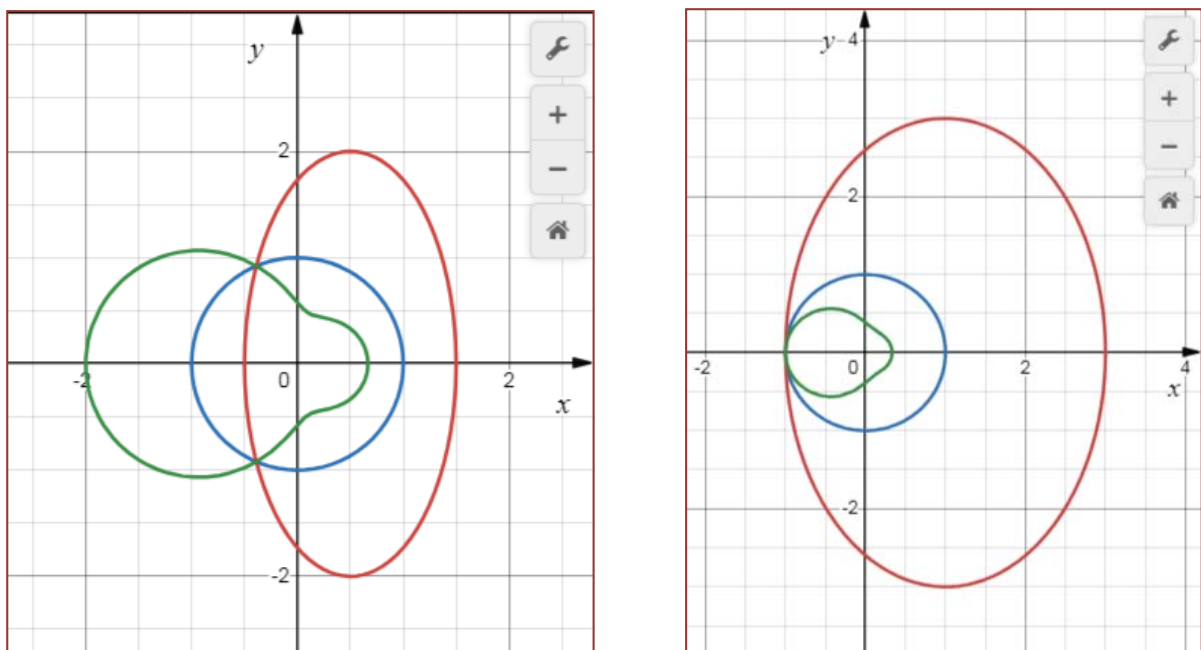


Рис. 8

8. Если $x_0 \in (R; +\infty)/\{a\}$, то образом эллипса является кривая, показанная зелёным цветом (рис. 9). По мере удаления эллипса от начала координат его образ уменьшается.

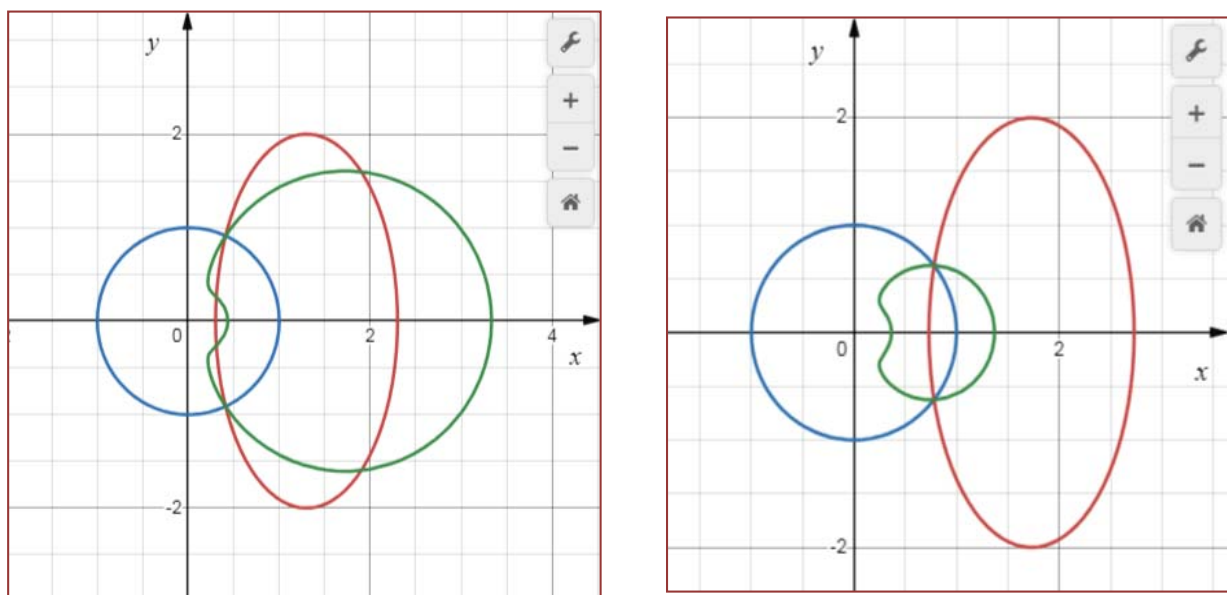


Рис. 9

9. Если $x_0 = a$, то образом является линия с изгибом у начала координат (рис. 10).

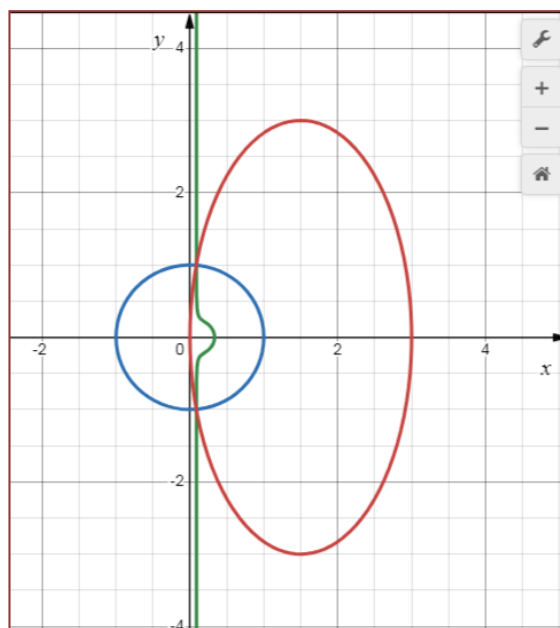


Рис. 10

Таким образом, мы рассмотрели инверсные образы эллипса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакельман, И. Я. Инверсия. М. : Наука, 1966. 80 с.
2. Зинатулина А. М., Кузуб Н. М. Инверсия кривых на плоскости // Вестник Иркутского университета. 2023. Вып. 26. С. 20–21.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ УЧАЩИХСЯ КАК МЕТОД ПОДГОТОВКИ К ГИА ПО МАТЕМАТИКЕ

ГИА является важным этапом в учебном процессе, который определяет уровень сформированности знаний, умений и навыков у учащегося. Цель проведения ГИА по профильной математике – оценить уровень учебных достижений выпускников в области математики на завершающем этапе обучения в школе. ГИА является важным этапом в учебном процессе, который определяет знания, умения и навыки учащегося. Задания ГИА по математике оценивают способность ученика применять различные математические методы и умения решать задачи разной степени сложности. Для успешной сдачи экзамена необходимо усвоить большой объем материала, глубокое понимание этого материала, умение решать задачи высокого уровня сложности. Подготовка к ЕГЭ по математике включает в себя необходимость систематически повторять изученный материал, регулярно решать тесты и задания, обращаться за помощью к учителю в случае затруднений и стараться поддерживать высокий уровень мотивации.

Эффективным способом подготовки к экзамену может быть индивидуальный школьный проект. В рамках индивидуального школьного проекта обучающийся самостоятельно выбирает тему, форму и методы работы, изучает предмет, проводит собственные исследования и представляет результаты проекта. Проект может быть связан с любой областью знаний и практики, включая математику. Целью индивидуального школьного проекта является развитие творческого и критического мышления, самостоятельности, умения работать с информацией и логически аргументировать свои выводы. Проект позволяет ученику глубже понять выбранную тему, расширить свои знания и применить их на практике. В контексте подготовки к ЕГЭ по математике проект может помочь ученику изучить конкретные темы, решить задачи, провести анализ, сделать выводы и представить свои исследовательские работы.

Выбирая тему индивидуального проекта по математике, старшеклассники МБОУ «Лицей № 1» г. Братска, рассчитывают на то, что проект поможет им изучить конкретные темы, научиться решать задачи в рамках ОГЭ или ЕГЭ по математике. Вот примеры таких проектов: «Интеллект-карты по теме «Графики функций», «Интеллект-карты по теме «Четырехугольники», «Графический метод решения задач с параметрами», «Применение теоремы Пифагора», «Интерактивный плакат «Пирамида», «Решение задач ЕГЭ по теории вероятностей». Остановимся на некоторых проектах подробнее.

Проект «Расположение корней квадратного трехчлена с параметром». В работе были рассмотрены задачи с параметрами (ЕГЭ по математике профильного уровня), сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена. Проводится анализ задач по данной тематике, структурирование изученной информации.

Проектный продукт – интерактивный плакат, разработанный в Microsoft PowerPoint (рис. 1). Нажимая на соответствующую кнопки, можно перейти на слайды с теоретическим материалом и примерами задач к данному разделу. Данный плакат был в открытом доступе для одноклассников.



Рис. 1. Проектный продукт работы
«Расположение корней квадратного трехчлена с параметром»

Проект «Интерактивный плакат – многогранники». Обучающимся рассматривается тема «Многогранники» в контексте подготовки к ЕГЭ. Структурирована необходимая информация по теме, сделана подборка задач из базы ЕГЭ ФИПИ. Продукт проекта – соответствующий интерактивный плакат (рис. 2), выполненный в программе Genial.ly.

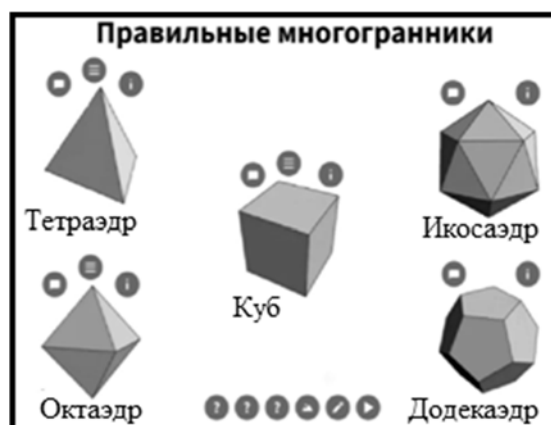


Рис. 2. Проектный продукт работы
«Интерактивный плакат – многогранники»

«Решение уравнений высших степеней разными способами». Результаты работы представлены в виде пособия по данной теме. Для тех обучающихся, кто планирует сдавать профильный экзамен по математике, данное пособие может быть очень полезным.

«Мобильный тренажёр «Теорема Виета: решение квадратных уравнений». Цель проекта: создать эффективное многоуровневое мобильное приложение, позволяющее освоить решение квадратных уравнений, применяя теорему Виета.

Приложение получилось в виде игры (рис. 3). Одноклассники с удовольствием оттачивали свои навыки решения квадратных уравнений, что, безусловно, необходимо для сдачи ГИА по математике.

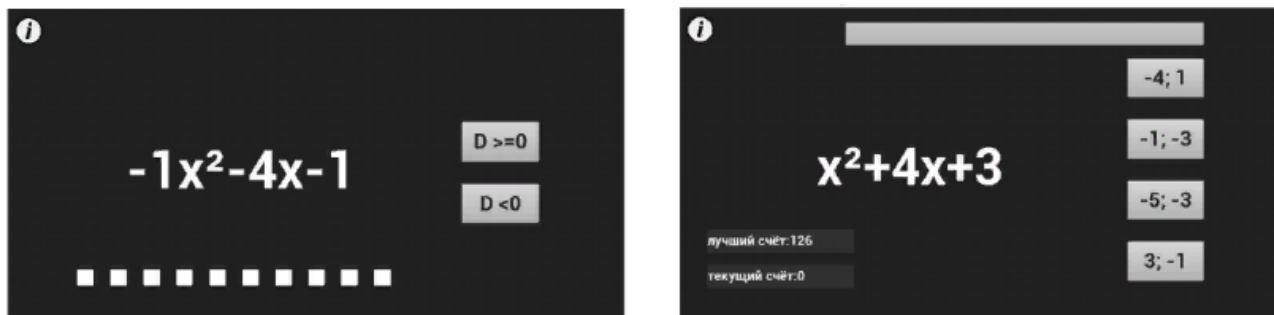


Рис. 3. Мобильный тренажер «Теорема Виета: решение квадратных уравнений»

«Функциональный метод решения уравнений и неравенств». В своём проекте, автором изучены методы решения нестандартных уравнений и неравенств, которые встречаются в заданиях 15, 18 второй части ЕГЭ по профильной математике. Проектный продукт – пособие по данной теме, в котором приведены примеры решения уравнений и неравенств ЕГЭ по профильной математике.

«Разработка телеграмм бота-тренажера на тему «Задачи по теории вероятности в ЕГЭ». Целью работы является разработка тренажера по решению задач ЕГЭ по теории вероятности. Данный тренажер помогает научиться решать соответствующие задачи и освоить необходимый теоретический материал по теме.

«Экономическая задача профильного ЕГЭ по математике». Цель работы: создание чат-бота в Telegram для ознакомления с экономическими задачами на кредиты и методами их решений. В работе дан необходимый теоретический материал, приведены примеры задач на кредиты, решения.

«Разработка телеграмм бота-тренажера на тему «Прямоугольный треугольник»». Целью разработки информационного проекта является решение проблем учащихся, возникающих при подготовке к экзамену по математике (тема «Прямоугольный треугольник»). В результате проекта представлен телеграмм бот- тренажер, который можно будет использовать для изучения и запоминания основных свойств прямоугольного треугольника. Данная работа была представлена на Международном форуме научной молодежи «Шаг в будущее» в 2023 г. Автор награжден дипломом второй степени.

Все разработанные учащимися электронные приложения находятся в свободном доступе. Одноклассники имеют возможность пользоваться данными разработками. Иногда они находят ошибки, дают советы по их исправлению, тем самым повышают свои собственные навыки по решению задач данной тематики.

Можно быть уверенным, что учащиеся, подготовившие данные проекты, получили глубокие знания по соответствующей теме и приобрели устойчивые навыки решения данных задач ГИА. Использование школьных проектов в подготовке к ГИА позволяет учащимся углубить и расширить полученные знания, применить их на практике, развить критическое мышление и творческие навыки.

Такой подход помогает школьникам развивать самостоятельность, организационные навыки, смекалку и исследовательскую активность. Школьный проект становится способом развития полноценного и комплексного мышления учащихся. Таким образом, использование школьных проектов в подготовке к ГИА является актуальным и эффективным способом обучения, который позволяет максимально раскрыть потенциал учащихся и добиться более высоких результатов на экзаменах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукьянченко Т. В., Наянова А. А. Учебное исследование и учебный проект – формы итогового индивидуального проекта выпускников основной школы // Современная наука: актуальные вопросы, достижения и инновации : сб. ст. 20-й Междунар. науч.-практ. конф. Пенза, 2021 С. 7–12.
2. Соколова Д. М. Учебный проект для подготовки к ОГЭ // Теория и практика образования в современном мире : сб. ст. XII Междунар. науч. конф. СПб., 2020 С. 39–41.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ПРОДУКТИВНОГО ПОВТОРЕНИЯ ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ В 5–6-Х КЛАССАХ

Современные стандарты организации обучения в школе направлены на стимулирование учителей к формированию социально-активной личности учащихся, выявлению их познавательных интересов и потребностей, а также на поощрение развития их самостоятельности. Одним из ключевых аспектов является необходимость проведения индивидуальной работы с талантливыми и одаренными детьми.

Олимпиада, как правило, выделяет лучших из лучших среди учащихся, однако каждый может испытать свои способности в проверке логического мышления и эрудиции. Предметная олимпиада способствует развитию инициативы учащихся и помогает выявить наиболее распространенные ошибки и трудности, с которыми школьники сталкиваются при выполнении заданий.

Двенадцатилетний опыт работы в школе показал, что детей необходимо готовить к олимпиадам и желательно во внеурочной деятельности. Организация повторения должна зависеть от логики содержания курса и его реализации в учебнике.

Рассмотрим на примере «Четные и нечетные числа», как авторы учебников дают однотипные задачи, которые не в полной мере могут раскрыть значимость этих тем для подготовки к олимпиадам по математике. Также авторы учебников не дают свойства четности (табл. 1).

Из этого делаем вывод, что разработка курса по решению олимпиадных задач с использованием принципа «Продуктивного повторения», позволит качественно и продуктивно подготовить обучающихся 5–6-х классов к олимпиадам по математике, а это в свою очередь повысит мотивацию обучающихся, а учителя будут более ответственно подходить к подготовке к занятиям.

Подобранные задачи для обучающихся 5–6-х классов будут способствовать повышению уровня усвоения данных тем, а также способствовать успешному применению тем в решении олимпиадных задач.

Новизна задач курса заключается в том, что они взаимосвязаны между собой. Пройдя тему, периодически решаем задачи, которые опираются на ранее изученный материал, без которого невозможно решить задачи, т. е. будет использоваться принцип продуктивного повторения. Курс рассчитан на два года. Он построен таким образом, чтобы ученики смогли включиться к усвоению отдельных разделов курса в течение учебного года. Занятия будут проводиться в малых группах для эффективного результата.

Далее приведем пример предлагаемых адаптированных задач (табл. 2).

Таблица 1

№ п/п	Автор, учебник	Способ введения понятия «четные, нечетные числа»	Наличие задач
1	Дорофеев Г. В., Шарыгин И. Ф. Математика 5 класс. М. : Просвещение, 2017	Не вводится понятие «четные и нечетные числа», лишь говорится о том, что «в натуральном ряду четные и нечетные числа, т. е. делимые и не делимые числа. Числа, кратные 2, в параграфе «Натуральный ряд. Сравнение натуральных чисел»	1. Рассмотрите последовательность нечетных чисел: 1,3,5,7,9,11... Какое число стоит в этой последовательности на 20-м месте? На 100-м месте? 2. Будем выписывать последовательные четные числа: 2, 4, 6, 8, 10, 12... Какое число окажется на 20-м месте? На 100-м месте? На 175-м месте?
2	Мерзляк А. Г. Математика 6 класс М. : Вентана-Граф, 2019	«Числа 2, 14, 26, 58 делятся нацело на 2. Натуральные числа, которые нацело делятся на 2, называются четными. Натуральные числа, которые не делятся нацело на 2, называются нечетными. Если запись натурального числа оканчивается четной цифрой, то это число делится нацело на 2» [4]	1. Выберите верные утверждения: 1) сумма двух нечетных чисел является нечетным числом; 2) сумма двух четных чисел является четным числом; 3) четным числом является произведение двух четных чисел; 4) нечетным числом является сумма четного и нечетного чисел; 2. четным или нечетным числом будет произведение двух натуральных чисел, если их сумма является нечетным числом?

Таблица 2

Тема	Стандартные формулировки задач	Адаптированные задания
Четные, нечетные числа при решении задач	«Верно ли утверждение: 1) Сумма двух четных чисел является четным числом; 2) Сумма двух нечетных чисел является нечетным числом; 3) Сумма четного и нечетного чисел является нечетным числом; 4) Произведение двух четных чисел является четным числом;» [3] 5) Умножение двух нечетных чисел является нечетным числом;	Пусть Ч – любое четное число, а Н – любое нечетное число. Выберите ответы которые являются четными 1) $Ч + Ч + Н$ 2) $Ч + Н + Н$ 3) $Н + Н + Н$ 4) $Ч \cdot Н + Н$ 5) $Н \cdot Н + Н$ 6) $Ч \cdot Н \cdot Н$
		1. Выберите верные варианты не высчитывая их значения: 1) $5 \cdot 6 + 7 \cdot 8$ 2) $(5 + 6) \cdot (7 + 8) + (9 + 11) \cdot (10 + 12)$ 3) $(3 + 4) \cdot (5 + 6) \cdot (7 + 8) \cdot (9 + 10)$ 4) $(1 + 2) \cdot (3 + 5) - (8 + 9) \cdot (10 + 12)$ 2. При каких любых целых m и n выражения будут четны? 1) $m \cdot n(m + n)$ 2) $m \cdot n(m + 2n)$ 3) $m \cdot n(m + 3n)$ 4) $m \cdot n(m - n)$ 5) $m \cdot n(m - 10n)$ 6) $m \cdot n(2m + 4n)$

	«Сумма двух натуральных чисел является нечетным числом. Четным или нечетным числом будет их произведение» [3]	1. Укажите все правильные варианты: 1) Всегда четна сумма 11 нечетных чисел; 2) Может быть четна, а может быть нечетна сумма 11 нечетных чисел; 3) Всегда нечетна сумма 11 нечетных чисел; 4) Всегда четна сумма 10 нечетных чисел; 5) Может быть четна, а может быть нечетна сумма 10 нечетных чисел; 6) Всегда нечетна сумма 10 нечетных чисел; 2. Не делая вычисления, выберите все, значения которых являются четными 1) $1 + 2 + \dots + 20$ 2) $1 + 2 + \dots + 21$ 3) $10 + 11 + \dots + 30$ 4) $11 + 12 + \dots + 30$ 5) $101 + 103 + \dots + 121$ 6) $101 + 103 + \dots + 131$ 1. Выберите все возможные значения, сумма которых $k_1 + k_2 + \dots + k$. Какое из следующих чисел является четным? 1) 0 2) 1 3) 2 4) 3 5) 9 6) 10 7) -1 2. Известно, что сумма 20 целых чисел $n_1, n_2, \dots, n_{20}$ нечетна. Какие из следующих чисел заведомо четные? 1) $n_1 - 3n_2 + n_3 + \dots + n_{19} - 3n_{20}$ 2) $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_{20}$ 3) $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_{10} + n_{11} \cdot n_{12} \cdot \dots \cdot n_{20}$
--	--	--

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дорофеев Г. В., Шарыгин И. Ф. Математика 5 класс : учеб. для общеобразоват. организаций. 5-е изд. М. : Просвещение, 2017. 287с.
2. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Математика 6 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. организаций. М. : Вентана-Граф, 2019. 411с.
3. Редько З. Б. Технология продуктивного повторения в процессе обучения математике в 5–6 классах. М., 2005. 149 с. URL: <https://perseusirk.ru/ps-mvoz-171222-241222/> (дата обращения 25.02.2024).

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ОБУЧАЮЩИХСЯ КАК ВАЖНЫЙ РЕСУРС ФОРМИРОВАНИЯ КЛЮЧЕВЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

На современном этапе развития общества с новыми технологиями и инновациями, мы все больше и больше говорим о том, что школьникам нужно не только получать готовые знания по разным предметам, но и уметь применять их в различных жизненных ситуациях. Развивающемуся обществу нужны активные, образованные, нравственные личности, умеющие самостоятельно принимать решения и делать правильный выбор, поэтому современными образовательными стандартами обоснована необходимость формирования у школьников ключевых образовательных компетенций. Термин «компетенция» мы будем рассматривать как круг вопросов, в которых человек обладает определенными знаниями и опытом. Педагогу XXI в. необходимо обучать детей получать необходимые знания, умению правильно взаимодействовать с людьми и окружающей действительностью. Одним из средств формирования таких компетенций является организация исследовательской деятельности обучающихся. Она дает возможность школьникам раскрывать свои индивидуальные способности, реализовать полученные знания и публично демонстрировать полученный результат. В ходе исследования обучающиеся могут не совершать великих научных открытий, но сам поиск этих знаний формирует активную жизненную позицию, рефлексивные способности и креативность.

Исследовательская деятельность предполагает три уровня взаимодействия педагога и школьника:

1. Учитель определяет школьнику проблему и подсказывает пути решения.
2. Учитель ставит только проблему, а ход исследования ученик определяет самостоятельно.
3. Постановку проблемы, выбор метода и пути решения проблемы ученик определяет самостоятельно. Это самый сложный уровень.

Исследовательская деятельность в образовательной среде играет важную роль – создание познавательного интереса и развитие мышления обучающихся. Данная цель реализуется путем решения следующих задач: формирование самостоятельности при работе с различными источниками и при выполнении экспериментов и наблюдений; развитие умения выражать свои идеи во время представления своей работы; воспитание уверенности в себе; привитие желания и в будущем заниматься исследовательской деятельностью.

Любое исследование направлено на формирование следующих образовательных компетенций обучающихся: учебно-познавательные; ценностно-смысловые; общекультурные; коммуникативные; информационные; социально-трудовые; личностное самосовершенствование.

Поэтому учитель сейчас является организатором воспитательной и развивающей среды, способный к конструированию, проектированию, и применению различных современных образовательных технологий.

Ежегодно наши ученики представляют свои исследовательские работы на разного уровня конференциях. Рассмотрим некоторые из них.

- Блюдина Светлана, обучающаяся 9-го «Б» класса, выступила на муниципальном конкурсе исследовательских работ по математике с темой «Математика в календаре». Светлану заинтересовали двенадцать систематизированных определенным образом числовых таблиц. Цель работы: изучение и систематизация математических закономерностей в календаре. В ходе исследования ученица изучила информацию об истории календаря, узнала многообразие современных календарей, изучила математические закономерности в календаре. Были подобраны интересные математические фокусы и олимпиадные задачи, которые можно использовать на уроках и занятиях внеурочной деятельности.

- Дударев Никита, ученик 9-го класса, проводил исследование на тему «Задачи на квадратной решетке», стал победителем конкурса исследовательских работ на муниципальном, а затем – региональном этапе. Никита предположил, что если разработать электронное учебное пособие для подготовки к экзамену по математике, то оно может помочь ребятам самостоятельно научиться решать задачи на квадратной решетке. В процессе исследовательской работы юноша изучил многообразие задач на квадратной решетке, подобрал необходимый теоретический материал. Помимо этого, хочется отметить, что в процессе исследовательской работы он систематизировал свои знания и закрепил методы решения данных задач, в результате чего он показал самый высокий результат ОГЭ в классе.

- Бобылев Илья, ученик 5-го класса, стал призером региональной учебно-исследовательской конференции, успешно представив свою работу по теме «Загадочный танграм». Илья изучил историю и правила головоломки танграм, создал своими руками настольные игры на основе данной головоломки.

- Белькович Наталья, ученица 5-го класса, стала победителем муниципального конкурса и призером регионального по теме «Одна за всех... Формула Пика». На уроках географии работая с контурными картами, девушка заметила, что любую территорию можно изобразить в виде многоугольника. Чтобы посчитать площадь любого земельного участка можно использовать формулу Пика. Для этого необходимо искомый земельный участок перенести на клетчатую бумагу. В качестве примера был выбран земельный участок, занимаемый МБОУ СОШ «Новая ЭРА». Для этого было несколько причин: земельный участок имеет границы, установленные в соответствии с действующим законодательством Российской Федерации; он поставлен на кадастровый учет; земельный участок имеет сложную форму; земельный участок знаком всем жителям нашего города.

Девушка скачала земельный участок со спутниковой карты в масштабе М 1:100 и наложила на него решетку и, используя формулу Пика, вычислила площадь земельного участка.

После всех расчетов Наталья сравнила полученную площадь со сведениями, содержащимися на сайте Росреестра.. Погрешность оказалась минимальной, значит, по формуле Пика легко и удобно по карте можно сосчитать площадь любой местности.

- Ученица 9-го класса Пархоменко София при защите итоговой проектной работы выбрала тему «Выгодно ли жить в кредит?». Девушка провела исследование, изучив много справочной и научной литературы, побывала во всех банках города Тулуна. София рассмотрела и научилась решать задачи по математике «Банки, вклады и кредиты», составила памятку для людей, берущих кредит, в виде справочного буклета. Проведя исследование, девушка нашла ответ на главный вопрос «Выгодно ли жить в кредит». Работа заинтересовала экспертов и получила высокую оценку, 1 место.

- Одной из замечательных исследовательских работ стала работа ученицы 6 класса Шакулашвили Анны по теме «Удивительный лист Мебиуса». В своей работе девушка не только описала лист Мебиуса, но и раскрыла процесс его изготовления. Опытным путём девушка узнала о его свойствах: односторонности, непрерывности и связности. Анна провела мастер-классы в день науки и в кругу семьи фокусы «Распутывание колец из веревок», «Вывертывание жилета на изнанку, не снимая с человека», «Проблема завязывания узлов».

В нашей практике свое применение нашли такие работы, как «Мой класс в статистических исследованиях», «Когда идут часы», «Инь – Ян», «Магия Чисел», «Формула красоты – это закон математики, природы или выдумка человека?», «Чудо-фокусы», «Треугольник Паскаля», «Нестандартные приемы вычисления», «Использование оригами при доказательстве теорем» и т.д.

Каждому ребёнку от природы дарована склонность к познанию и исследованию окружающего мира. Правильно поставленное обучение должно совершенствовать эту склонность, способствовать развитию соответствующих умений и навыков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богоявленская Д.Б. О природе исследовательской деятельности // Исследователь = Researcher. 2020. № 4. С. 29–39.
2. Богоявленская Д.Б. Исследовательская деятельность как путь развития одаренности // Творчество молодых исследователей в системе «школа – наука – вуз» : сб. тр. Рос. науч.-метод. конф.-семинара / под ред. Д. Б. Богоявленской, А. О. Карпова. М., 2017. С. 20–27.
3. Леонтович А. В. В чем отличие исследовательской деятельности от других видов творческой деятельности // Завуч. 2001. № 1.
4. Савенков И. А. Учим детей выдвигать гипотезы и задавать вопросы // Одаренный ребенок. 2003. № 2. С. 76–86.
5. Хуторской А. В. Ключевые компетенции. Технология конструирования // Народное образование. 2003. № 5. С. 55–61.

М. Н. Полякова, И. Ю. Куприкова

*МБОУ города Иркутска «Средняя общеобразовательная школа
с углубленным изучением отдельных предметов № 14»,
г. Иркутск*

ФОРМИРОВАНИЕ ЛИЧНОСТНЫХ КАЧЕСТВ ПРИ СОЗДАНИИ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПРОФАЙЛОВ ДЛЯ УРОКОВ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ

2024 год в нашей стране объявлен годом семьи. В современном образовании большое внимание уделяется не только передаче знаний, но и развитию личностных качеств учащихся. Одним из эффективных методов формирования личности ученика является создание индивидуальных профилей для уроков по теории вероятностей и статистики. Подготовка к урокам математики способствует развитию у учащихся рационального мышления, логики и аналитических способностей. Эти навыки не только помогают лучше понимать математические концепции, но и способствуют развитию критического мышления, умению аргументировать свою позицию и находить решения в повседневных ситуациях, включая общение внутри семьи.

Создание индивидуальных профайлов для уроков по теории вероятностей и статистики хорошо помогает при подготовке и проведении тренингов по решению задач. Это позволяет обучающимся ставить перед собой задачи, составлять траекторию для их достижения.

Тренинги готовятся и проводятся малыми группами учащихся в своем классе и на других параллелях.

При этом учащиеся работают в малых группах, используя метод консультантов.

Работа в группе учит распределять обязанности, брать на себя роль ведущего или организатора проведения тренинга, выполняет большую профориентационную работу и дает обучающимся возможность публичного выступления перед аудиторией, а также возможность попробовать себя в роли наставника.

Большой временной период разделяет первичное ознакомление с комбинаторными задачами 5–6-х классах и экзамены в 9-х и 11-х классах, в целях повторения была выбрана тема внеклассного занятия для учащихся 9–11-х классов «Решение комбинаторных задач». Положительная черта таких тренингов заключается в получении учащимся адресной поддержки и повышения опыта как в исследуемой области, так и в межличностном взаимодействии.

Предлагаем вашему вниманию проект «Научи меня учиться».

Организаторами проекта являются М. Н. Полякова и И. Ю. Куприкова.

Возраст участников 9–11 параллель.

Срок реализации 2023/2024 учеб. год.

Гипотеза: организация совместной деятельности разновозрастных групп.

Цель проекта: формирование навыка решения разноуровневых задач в условиях совместной проектной деятельности

Задачи проекта:

1) научить учащихся распознавать ситуации, требующие использования определённого типа задач.

2) отработать объяснение решения задач в затруднительной ситуации

3) отработать навыки работы в учебных группах.

Прогнозируемые результаты: значительное улучшение качественных показателей.

Актуальность: большой временной период разделяет первичное ознакомление с комбинаторными задачами 5–6-х классах и экзамены в 9-м и 11-м классах, в целях повторения была выбрана тема внеклассного занятия для учащихся 9–11-х классов «Решение комбинаторных задач». Положительная черта такого метода заключается в получении учащимся адресной поддержки и повышения опыта как в исследуемой области, так и в межличностном взаимодействии.

Этапы проведения проекта:

Подготовительный:

Подбор теоретического материала и практических задач участниками проекта по теме «Решение задач на проценты».

Презентационный:

Презентация подобранного теоретического и практического материала.

Практический:

Решение задач подобранных на подготовительном этапе.

Контрольный:

Проверка навыков решения задач.

Рефлексия:

Уменьшение уровня тревожности при решении задач.

Предполагаемый продукт: кейс-задачи.

На подготовительном этапе были подобраны теоретические материалы из учебников по математике 9–11-х классов. Материал был представлен в виде сигнальных карточек.

В ходе проекта учащимися были подготовлены презентации, где они кратко рассказали о разных типах комбинаторных задач.

Участники проекта в составе команд решали предложенные задачи.

Было проведено контрольное тестирование.

Проведен самоанализ работы. В результате были созданы кейс-задачи.

Приложение

Задания для тренинга

Группа 1. Размещения

Задача (решение объясняется ведущими).

Команда из 7 баскетболистов должна выстроиться в шеренгу перед тренером. Сколькими способами они могут это сделать?

Решение: Эта задача связана с размещением, поскольку порядок баскетболистов в шеренге имеет значение.

Обозначим количество баскетболистов как $n=7$. Также обозначим количество мест, на которые они могут выстроиться, как $k=7$ (поскольку количество баскетболистов совпадает с количеством мест в шеренге).

Тогда количество способов разместить 7 баскетболистов в шеренге можно вычислить по формуле размещений:

$$A(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

где « $n!$ » обозначает факториал числа n .

В данной задаче у нас: $n=7$ и $k=7$ $A(7, 7) = \frac{7!}{(7-7)!} = 7!$

Таким образом, количество способов разместить 7 баскетболистов в шеренге равно $7!=5040$.

Задача 2 (самостоятельно, при помощи консультантов).

Конечное множество из 6 различных книг размещается на 3-х полках. Сколькими способами это можно сделать, если на каждой полке должна быть хотя бы одна книга?

Решение:

Для решения этой задачи мы можем использовать метод инфиксной нотации. Мы сначала обеспечим, чтобы на каждой полке была хотя бы одна книга, затем рассмотрим все возможные способы распределения оставшихся книг.

Количество способов выбрать книги для первой полки (1 книга должна быть выбрана) – 6 способов.

Количество способов выбрать книги для второй полки (1 книга должна быть выбрана) – 5 способов.

Количество способов выбрать книги для третьей полки (1 книга должна быть выбрана) – 4 способа.

Мы рассматриваем размещение, поэтому порядок книг имеет значение. Общее количество способов распределения книг на 3-х полках с учетом условия будет равно: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ способов.

Группа 2. Перестановки.

Задача 1 (решение объясняет консультант)

Команда из 5 танцоров выступает на сцене и должна выстроиться в шеренгу для поздравления зрителей. Сколькими способами они могут это сделать?

Решение: В данной задаче порядок танцоров в шеренге имеет значение, поэтому мы рассматриваем перестановки.

У нас есть 5 танцоров, и мы должны рассчитать количество способов выстроить их в шеренгу из 5 человек.

Количество перестановок из 5 танцоров можно рассчитать как $5!$, что равно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Таким образом, команда из 5 танцоров может выстроиться в шеренгу с 120 различными способами.

Группа 3. Сочетания.

Задача 1 (решение объясняют ведущие)

У нас есть 8 человек, и мы должны выбрать команду из 3-х человек для участия в соревнованиях. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: В этой задаче нам нужно найти количество способов выбрать команду размером 3 из 8 человек, что соответствует задаче о нахождении количества сочетаний.

Количество сочетаний из n объектов по k объектов равно числу биномиальных коэффициентов и может быть найдено с помощью формулы сочетаний $C(n, k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, где $n!$ обозначает факториал числа n .

В данной задаче у нас $n=8$ (общее количество человек) и $k=3$ (размер команды).

Используем формулу сочетаний: $C(8, 3) = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!}$

Вычисляем факториалы: $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ и $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Подставляем значения: $C(8, 3) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$

Таким образом, команду из трех человек можно выбрать 56 различными способами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ш. А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни. 9-е изд. М. : Просвещение, 2021. 463 с.
2. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. 9-е изд., стереотип. М. : МЦНМО, 2023. 400 с.
3. Высоцкий Р. И. Дидактические материалы по теории вероятностей. 8–9 классы. 2 изд., стереотип. М. : МЦНМО, 2023. 224 с.
4. Мордкович А. Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. для общеобразоват. организаций (базовый и углубл. уровни). В 2 ч. Ч. 2. 9-е изд. М. : Мнемозина, 2020, 351 с.
5. Студецкий В. Н. Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей. 7–9 классы. Изд. 2-е. Волгоград : Учитель, 2006. 428 с.

ОРГАНИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ВО ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Уже не первый год в рамках учебного процесса мы говорим о формировании функциональной грамотности. На мой взгляд, это связано в первую очередь с исследовательской деятельностью. Необходимо прививать желание у учащихся взаимодействовать с окружающим миром, проводить наблюдения, делать соответствующие выводы. Это можно осуществлять через следующую деятельность: проведение экскурсий при посещении предприятий (в рамках профориентации), при создании и защите различных проектов и мастерские по изготовлению пособий. А мы знаем, что внеурочная деятельность является логическим продолжением учебного процесса. Кружок «Наглядная геометрия» позволяет выйти за рамки школьного учебника и применить ранее изученный материал. Проводя свои исследования и наблюдения, развивается:

- 1) компьютерная грамотность (умение использовать графические редакторы и искать нужную информацию в интернете);
- 2) информационная грамотность (умение отбирать и систематизировать нужную информацию в справочной и научной литературе);
- 3) коммуникативная грамотность (умение работать в группах, уметь слушать, высказывать своё мнение, владея грамотной речью).

В 5–6-х классах при изучении окружности и построение с помощью циркуля окружности учащимся очень нравится рисовать рисунки, выполняя ряд команд.

1. Построить окружность любого радиуса. 2. На окружности отметить точку. 3. Не меняя раствора циркуля, провести окружность с центром в отмеченной точке. 4. Из точки пересечения второй окружности с первой провести следующую окружность с тем же радиусом. 5. Повторить ещё 4 раза.	1. На листе в левом нижнем углу нарисуйте дугу. 2. От неё по линейке провести несколько произвольных прямых линий. 3. По этим линиям произвольно «идите» ножкой циркуля и рисуйте полуокружности по разные стороны от основной линии. 4. Основные линии нужно стереть, получатся волнистые лучи.
---	---

Результат настолько удивил ребят, что им непременно захотелось посмотреть, познакомиться с линиями (кривыми), которые можно встретить в жизни. Узнать происхождение, историю названия, где можно увидеть и как можно применить (т. е. в какой области или в какой профессии). Ну и обязательно попробовать самим нарисовать.

На данном этапе мы говорим о формировании функциональной грамотности, то используя комплект кейсов, мы нашли интересную задачку (рис. 1).

На рисунке изображены окружности с центрами в точках А и В. Радиус самой маленькой окружности 1 см, следующей- 2 см, затем- 3 см и т.д. Муха ползает из точки А и должна побывать в точке В и в точке С.

1. Нарисуйте самый короткий путь мухи.
2. Найдите его длину.

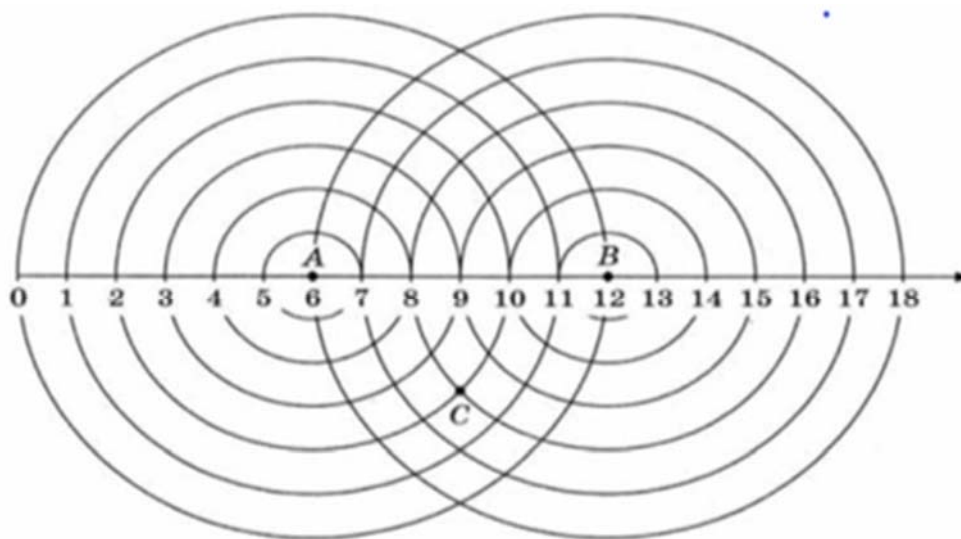


Рис. 1

Учащиеся предположили, а что получится, если муха ползёт по радиусу равномерно вращающегося диска. Путь, описанный мухой, – это кривая, называемая спиралью Архимеда. Научились ее рисовать и, конечно же, узнали о её применении (рис. 2–3).



Рис. 2. На уроке технологии механизм для наматывания нити на шпульку (натяжитель нити)



Рис. 3. Экскурсия на предприятие города

Очень понравилось проводить наблюдения и соответственно приводить свои выводы. Рассматривая кривую «Полярная звезда», учащимся понравился сам процесс построения (применяя компьютерную программу). А что же в результате? Результат – это работы, представленные на выставке «Изонить» (рис. 4).

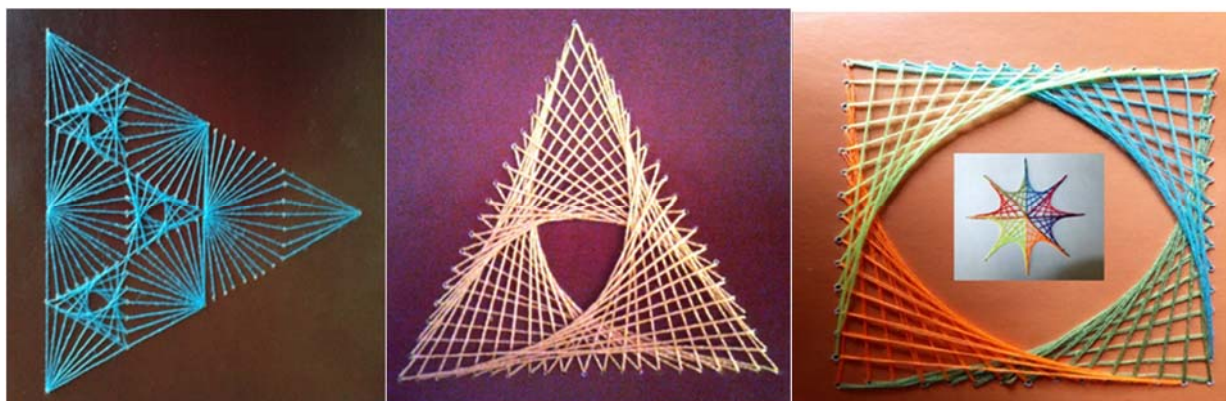


Рис. 4

На этом мы не остановились. Скатываясь по снежной горке, профиль которой выполнен в виде циклоиды, мы окажемся у основания горки быстрее, чем в случае другой формы горки. Сходили на лыжную базу, посмотрели, проверили, сделали вывод. Провели эксперимент с помощью вспомогательного круга. Нарисовали с помощью циркуля и линейки.



Рис. 5

Захотелось больше рассмотреть замечательных кривых и в применении к урокам физики и геометрии. Знаменитая задача о делении произвольного угла на 3 равные части. Конхоида Никомеда, названная в честь древнегреческого геометра, который изобрёл прибор для её построения. Ребята с удовольствием сами её нарисовали и тоже очень этим гордились (рис. 6 и 7).



Рис. 6.

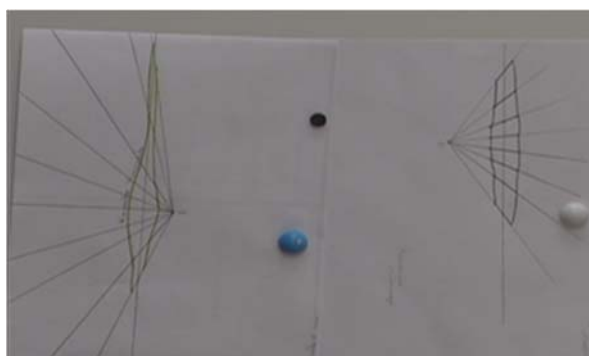


Рис. 7

Помимо упомянутых выше кривых ребята также изучили способы построения и область применения гиперболы, параболы, кардиоиды, улитки Паскаля. Результатом нашей работы стала игра «Суд над кривыми», где было доказано о их полезности в нашей повседневной жизни (рис. 8 и 9).

Всю красоту кривых в природе и жизни доказывали учащиеся 5–6-х классов. Им в противовес выступали «многоугольники» в лице старшеклассников. Благодаря такому мероприятию и большой проделанной работе выпускники 11-го класса узнали о важности изучения математики. Из всей данной совместной работы учащиеся сделали вывод, что кривые играют значимую роль в нашей жизни. Без них было бы невозможно существование многих растений, животных, космических галактик. Также без знания таких фигур люди не смогли бы воспроизводить красоту в архитектуре, ландшафтном дизайне и любой другой своей деятельности. Научились делать построение некоторых фигур и в итоге пришли к выводу, что всё всегда связано с окружающим нас миром, и ничего не возникает из ниоткуда.



Рис. 8



Рис. 9

На уроках, к сожалению, мы не сможем показать такую красоту и значимость кривых. Внеурочная деятельность – одна из важнейших форм для формирования мотивации к изучению и исследованию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Факультативный курс по математике : учеб. пособие для 7–9 кл. сред. шк. / сост. И. Л. Никольская. М. : Просвещение, 1991. 383 с.
2. Математика. 6 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. организаций / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. 3-е изд. М. : Просвещение, 2023. 149 с.
3. Корнилова Т. В. Исследовательская деятельность школьников как способ формирования функциональной грамотности // Научные труды Московского гуманитарного университета. 2020. № 4. С. 56–63.
4. Комплект кейсов по формированию функциональной грамотности. М., 2022.

ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ УРОВНЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Нет области математики, как бы абстрактна она ни была,
которая однажды не смогла бы быть применена
к явлениям реального мира.

Н. И. Лобачевский

В наши дни для школьников основной мотивацией к приобретению новых знаний является возможность воспользоваться полученными знаниями при решении жизненных проблем. Заучивание правил, свойств и теорем потеряло смысл, так как поиск необходимой информации в век интернета и гаджетов не составляет труда, а также не является гарантией того, что человек, владея информацией, сможет правильно её применить. Основная задача, которая стоит перед учителем сегодня, – это научить будущих выпускников применять полученные на уроках знания в жизненных ситуациях. Поэтому современное образование должно быть направлено на формирование функциональной грамотности учащихся, одной из составляющих которой является математическая грамотность.

Важную роль в формировании математической грамотности играет решение прикладных задач, потому что они служат целью и средством обучения. Если учащиеся способны увидеть в способах решения повседневной проблемы применение математических методов и фактов, то они будут воспринимать математику не как формально им навязанный набор правил, теорем и определений, а как практически необходимые им знания. Для решения данной педагогической задачи нужно включать в содержание уроков практико-ориентированные задачи, которые интересны для ребят своей необычной формулировкой. Они вовлекают ребят в учебный процесс, способствуют развитию их логического мышления. Благодаря таким задачам школьники видят, что математика находит применение в разных областях жизнедеятельности человека, в том числе и профессиональной, что повышает интерес к математике как предмету.

Формирование математической грамотности требует от учителя изменений в содержании урока и в формах работы с детьми. С этой целью при проведении уроков математики мы систематически предлагаем ученикам для решения задачи, в которых изменена привычная для восприятия структура. Особый интерес у ребят вызывают задачи с практическим содержанием, представляющие реальные жизненные ситуации. Примерами таких задач служат задания 1 части ЕГЭ и ОГЭ, а также и авторские задания, связанные с формированием практических навыков. Также на уроках создаются проблемные ситуации. Приведем несколько фрагментов уроков, целью которых является формирование умений использовать математические знания в социально-значимой ситуации.

На одном из уроков с ребятами 7-го класса МОУ Лицей г. Черемхово проводилась деловая игра «В мире профессий». В повседневной жизни любой человек, какой бы профессиональной деятельностью он не занимался, решает математические задачи. Он ходит в магазин, рассчитывает свой бюджет, оплачивает счета, выбирает тариф интернета, телефонной связи, рассчитывает выгодные покупки, планирует и участвует в ремонте жилья, в его строительстве, берет кредиты в банке и т. д. В ходе данной игры класс был разделен на 4 группы. Командиры групп выбирали карточки с названиями определённых профессий: повар, строитель, продавец и финансист. После чего группа получила мини сборник с задачами. Перед учащимися была поставлена цель: верно классифицировать задачи по профессиональной принадлежности, решить и защитить решение тех из них, которые относятся к данной профессии. Группами были представлены решения следующих задач.

- **Повар:** «Для приготовления новогоднего салата «Под шубой» нужно 3,5 кг селедки по цене 134 руб. за 1 кг, 1,4 кг свеклы по цене 90 руб., 300 г лука по цене 23 руб., 1,5 кг картофеля по цене 50 руб. за 1 кг, 2 баночки майонеза массой 500 г. по цене 140 руб. Хватит ли 1000 руб. для приобретения всех продуктов?»

- **Строитель:** «Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или фундамент из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 6 м³ пеноблоков и 3 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимы 5 т щебня и 45 мешков цемента. 1 м³ пеноблоков стоит 2300 руб., щебень стоит 650 руб. за 1 т, а мешок цемента стоит 240 руб. Сколько будет стоить материал, если выбрать наиболее дешевый вариант?»

- **Продавец:** «Товар стоил 500 руб. Сначала его уценили на 25 %, а затем стоимость вновь повысили на 25 %. Изменилась ли цена товара и насколько?»

- **Финансист:** «В банк сделан вклад на сумму 100 000 руб. под 10 % годовых на 3 года (проценты начисляются один раз после истечения года) с правом сделать дополнительный вклад фиксированной суммой 50 000 руб. два раза (в конце каждого года). Какая сумма будет на счете через 3 года?»

На уроке в 6-м классе при изучении темы «Решение задач с помощью уравнений» перед учащимися была поставлена проблемная задача: «Ребята, помогите мне решить такую проблему. Скоро наступит лето и нам будет необходимо оформить клумбу во дворе лицея, а для этого надо посадить семена настурции. Садить семена рекомендуется при прогреве почвы от 17–19 °С (при посеве в почву, прогретую от 9 до 16 °С всходы, будут неравномерные и слабые). Горшочек с землёй стоял в неотапливаемом подвальном помещении. Вчера вечером его занесли в кабинет. Подумайте и решите, стоит ли сейчас посадить семена в землю или еще надо подождать, если сейчас сумма температуры воды, почвы и воздуха равна 44°С. Температура воды в 2 раза меньше температуры почвы, а температура воздуха в 2,5 раза больше температуры воды».

На уроке геометрии при закреплении темы «Многогранники» в 10-м классе с включением момента проектной деятельности, учащимся было предложено выполнить следующее задание. «Не далеко от г. Черемхово (на расстоянии 80–96 км по автодороге), на берегу Ангары есть прекрасный уголок «Медвежий угол».

Инфраструктура там развита слабо. Заинтересовало это место предпринимателей. Строительная фирма подрядчик «Дачстрой» осваивает этот уголок. Они провели опрос среди разных слоев населения, с целью изучения спроса на строительство объектов для отдыха. И по результатам данного опроса в первую очередь фирма приняла решение строить дачный поселок. Фирма обратилась с просьбой провести расчеты затрат на установку коробки дачного домика по выбранному ими проекту. « Для выполнения данного задания класс разделили на группы – конструкторские бюро: «Углофф и Ко», «Жилой квадрат» и «Тетра+».

Каждой группе было дано задание:

1. Составить смету расходов на каждый этап строительства коробки, с учетом размеров дома, представленных на схемах конструкций. При составлении сметы необходимо выбрать подходящий строительный материал, из предложенного в прайс-листе.

2. Пиар-менеджеру группы представить результат работы, как доказательство своей конкурентоспособности.

Группы получили задание в кейс-пакетах по направлениям: фундамент, наружные стены, конструкция крыши с кровлей. В ходе данного занятия учащиеся помимо повторения учебного материала, поучаствовали в профессиональных пробах.



Итак, можно сделать вывод, что основной целью практико-ориентированного обучения является подготовка учащихся к решению задач, связанных с практической деятельностью человека, и формирование готовности к применению знаний и умений в процессе своей жизнедеятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Использование практико-ориентированного подхода в обучении математике : метод. рекомендации / сост. Т. В. Шаховал. Южно-Сахалинск : Изд-во ИРОСО, 2020.
2. Цитаты известных личностей. URL: <https://ru.citaty.net/tsitaty/1982630-nikolai-ivanovich-lobachevskii-net-oblasti-matematiki-kak-by-abstraktna-ona-ni-b/>
3. Практико-ориентированные задачи на уроках математики. URL: <https://www.menobr.ru/article/46264-praktiko-orientirovannye-zadachi-na-urokah-matematiki-iz-opyta-raboty>

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ГРАМОТНОСТЬ КАК ПОКАЗАТЕЛЬ УРОВНЯ ОБРАЗОВАНИЯ СОВРЕМЕННЫХ ШКОЛЬНИКОВ

Понятию функциональной грамотности в современной школе уделяется большое внимание. Уже в 1957 г. ЮНЕСКО ввела понятие «функциональная грамотность», которое определила, как «умение читать, писать и использовать навыки повседневной жизни». В ФГОС основного общего образования особое внимание уделяется развитию функциональной грамотности с целью подготовки выпускников к успешной взрослой жизни и умению решать возникшие проблемы.

Функциональная грамотность включает в себя:

1. **Читательская грамотность** (уровень владения текстом), которая заключается в умении правильно использовать тексты для достижения целей и для расширения определённых знаний и навыков. В работе учителей математики особую роль занимают задачи с избыточными (дополнительными) данными. Например, *«Периметр прямоугольника равен 10 см, а сумма двух его сторон равна 7 см. Найдите длину сторон прямоугольника»*.

Причина, по которой мы, учителя, придумали включать «лишние» («дополнительные») данные, – очевидна. Это – заставить учащихся правильно читать текст задачи и выделять главную мысль (смысловое чтение). При решении такой задачи учащимся необходимо так преобразовать задачу и изменить условия, чтобы остались только нужные данные для решения задачи.

Рассмотрим задачу с избыточными (лишними) данными (5-й класс).

6 платьев, 4 блузки, и 4 платья были сшиты из 48 метров ткани. На все блузки ушло 8 метров ткани, на платья – на 16 метров больше, чем на блузки. Сколько метров ткани было израсходовано для халатов?

Первый этап (анализ) включает в себя понимание ситуации, описанной в задаче, выявление условий и определение известных и неизвестных величин.

Второй этап (поиск плана решения проблемы) предполагает установление связей между данными и исходными условиями. Анализ проводится на основе вопроса к задаче.

Третий этап (выполнение плана решения задачи) – задача по нахождению ответа на вопрос. Учащиеся решают задачу по действиям с обязательным пояснением.

Четвертый, заключительный этап – проверка решения.

При решении таких задач учитель должен научить учащихся умению определять, какие данные лишние, как изменить вопрос, чтобы использовать все данные, и как изменить при этом условия. В этом случае они также решают не один, а несколько задач. Таким образом, ученики делают первый шаг к моделированию ситуации при решении задачи.

2. Математическая грамотность, один из компонентов функциональной грамотности, означает способность решать математические задачи, логически рассуждать и анализировать информацию.

Существует три уровня развития математической грамотности.

Первый уровень – «воспроизведение», который относится к знанию теории и способности выполнять основные задания школьной программы. Сюда входит знание математических формул и правил, применение стандартных алгоритмов.

Второй уровень – установление связей. Здесь учащимся необходимо самостоятельно выбирать подходящие методы решения и необходимые математические инструменты.

Третий уровень – рефлексия, которая включает в себя математическое мышление, обобщение, систематизацию и навыки моделирования.

И лучшими примерами развития математической грамотности как компонента функциональной грамотности, являются практико-ориентированные задания (например, первые пять заданий ОГЭ (задачи на шины, теплицы, автострахование, участки). Ученики должны уметь применять свои математические знания и навыки для построения простейших математических моделей и чтения информации, представленной в виде графиков, диаграмм, графиков и таблиц.

3. Финансовая грамотность – это «способность принимать рациональные и целесообразные решения о финансах в различных сферах личной жизни».

Мы считаем, что финансовая грамотность должна формироваться с начальной школы на уроках математики. Уже в начальной школе учащиеся начинают познавать, что такое стоимость, цена, количество, производство. Изучают денежные единицы и их сравнивают. Учащиеся младших классов учатся теоретически решать финансовые проблемы. Например,

Задача 1. В декабре мать получила премию 18000 рублей, а отец получил премию на 5000 рублей больше, чем мать. На сколько увеличился доход семьи в декабре?

Задача 2

Траты семьи	Сумма
Электричество	1650 руб.
Плата за воду	875 руб.
Расходы на вывоз мусора	180 руб.

Учитель формулирует вопрос: в этой таблице показаны коммунальные расходы семьи в месяц. Какая статья расходов самая дорогая? Какая услуга стоит меньше всего денег? Найдите общую сумму, потраченную на коммунальные услуги. Сколько денег остается у семьи, вычитаемых из страховых взносов, и как они расходуются. Сколько денег родители могут потратить на карманные расходы своих детей. На чем основан выбор?

Мы считаем, что финансовая грамотность на уроках математики имеет положительные последствия: она способствует развитию внутренней мотивации к обучению, преодолевает оторванность математики от реальной жизни, повышает качество, прививает бережливость, экономность и предприимчивость.

4. Естественнонаучная грамотность – это способность формировать свою точку зрения на вопросы, связанные с естественными науками. Для учителей математики данное направление представляет собой внутриурочную интеграцию с отдельными частями преподавания, требующими знаний из других предметов.

Например, *математика – физика*. Решение задач о физическом смысле производных; решение задач на движение. *Математика – химия*. Решение задач на смеси и сплавы. *Математика – география*. Решение задач по теме «Масштаб», определение расстояния. *Математика – экология*. Решение задач экологического содержания. *Математика-экономика*. Вопросы экономического содержания включены во вторую часть ЕГЭ по математике.

5. Глобальные навыки – это способность эффективно действовать как в одиночку, так и в команде для решения масштабных задач. Поэтому стремление учителей математики к формированию глобальных компетенций у обучающихся – это часть ответа на вопрос «чему и как мы должны учить сегодня для будущего успеха наших учеников».

Основными задачами для формирования глобальной компетентности у учащихся на уроках математики являются:

- Задачи, связанные с трудовой деятельностью людей.
- Задачи, содержащие исторические сведения.
- Задачи, формирующие научное мировоззрение.
- Задачи, связанные с нравственным воспитанием
- Различные творческие задания.

6. Творческое мышление – это способность создавать и совершенствовать идеи самостоятельно или в команде, предлагать инновационные и эффективные решения и развивать воображение. Для развития творческого мышления учителям математики следует использовать такие задания, как *проблемные ситуации*, открытые задачи (задачи, в которых учащиеся могут получать новые заново сформулированные задачи), поисковые задачи. Особую роль играет в данном случае *игровой компонент* на уроках математики

В процессе игры учащиеся включаются в сложные отношения, ищут оптимальные решения, анализируют различную информацию. Такая форма урока стимулирует и партнёрские отношения между одноклассниками, и чувство внутренней свободы, дружественной взаимоподдержки. Урок – игра снимает авторитарную позицию учителя, уравнивает в правах всех участников образовательного процесса.

В настоящее время важными функциональными качествами личности являются инициативность, способность творчески мыслить, умение находить нестандартные решения, способность к выбору профессионального пути и подготовка к обучению в течение всей жизни. Все эти функциональные компетенции формируются в школе. Важными показателями также являются такие ключевые компетенции, как умение правильно решать проблемы, владение информацией в любой форме и коммуникативными навыками.

Таким образом, функциональная грамотность является важной составляющей образования современного школьника. Она позволяет детям использовать свои знания и навыки на практике и развивать ключевые компетенции для жизни.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Функциональная грамотность младшего школьника : кн. для учителя / под ред. Виноградовой Н. Ф. М. : Российский учебник : Вентана-Граф, 2018. 288 с.
2. Ермоленко В. А., Перченко Р. Л., Черноглазкин С. Ю. Дидактические основы функциональной грамотности в современных условиях : пособие для работников системы образования / Рос. акад. образования. Ин-т теории образования и педагогики. М., 1999.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ МЕРОПРИЯТИЯ ПО ФИНАНСОВОЙ ГРАМОТНОСТИ

Этап получения образования в школе является лучшим этапом жизненного цикла человека, на котором ему может быть предоставлена возможность получить навыки финансовой грамотности, поскольку в современном мире дети значительно раньше сталкиваются с деньгами, понимают их значение и учатся зарабатывать, школа должна помогать учащимся начинать адаптацию к активной жизни в условиях рынка.

На базе нашей школы открыта муниципальная инновационная площадка «Школа финансовой грамотности». В рамках работы данной площадки нами реализуется курс внеурочной деятельности «Финансовая грамотность». В данной статье описываем мероприятие, проведенное в рамках курса внеурочной деятельности при изучении темы «Налоги».

Целью данного занятия было погружение обучающихся 9-х классов в вопросы финансовой грамотности и формирование представления об одной из современных проблем рыночной экономики – самозанятость граждан Российской Федерации.

Предмет финансовой, математической и читательской грамотности на мероприятии был рассмотрен через вопрос самозанятости молодёжи. Перед обучающимися выступили специалисты налоговой службы, представитель банка, самозанятый, осветив вопросы налогов для самозанятых и официально работающих людей, рассказали о рисках при неуплате налогов. Далее обучающимся было предложено несколько задач для обсуждения и решения, которые представлены в данной статье. Модераторы курировали работу каждой группы.

Задача на самозанятость «Блогер»

Даше 16 лет, она учится в 10-м классе. Во время каникул вместе с родителями Даша много путешествует по России и рассказывает об этом в своем «Telegramм-канале»: пишет посты, снимает видео, делает обзоры о туристических местах в разных уголках нашей страны.

В своем блоге Даша размещает рекламу сервисов по поиску билетов и иногда по просьбе некоторых подписчиков за символическую сумму разрабатывает авторские гайды о путешествиях.

Гайд – путеводитель, но без скучных исторических справок, только интересные факты и советы, как сделать поездку еще интереснее. Гайд находится в личном кабинете, доступ к которому придет после оплаты. Гайд создан с целью облегчить процесс планирования поездки.

Даша считает, что она не должна платить никаких налогов, поскольку:

- во-первых, она несовершеннолетняя,
- во-вторых, канал – это ее хобби, а не работа,

● в-третьих, сумма, которую она зарабатывает в месяц, не превышает 15 тысяч рублей, да и не каждый месяц она получает деньги.

ВОПРОСЫ:

1. Права ли Даша?

2. Какой доход будет у Даши за летние каникулы, если она с семьёй путешествовала по Алтаю? Даша регулярно писала полезные заметки для тех, кто собирается в путешествие, публиковала карты, инструкции, обзоры, подробные тексты и свои фотографии из путешествий.

Двадцать семь подписчиков оплатили гайд. Двоим Даша организовала авиабилеты и гостиницу (со страховыми полисами). За рекламу на карту пришло 1500 руб.

Средний размер комиссий с CPA: Авиабилеты и гостиницы – 2000 руб, экскурсии (гайд) – 300 руб., аренда автомобиля – 400 руб., билеты на междугородные автобусы и поезда – 300 руб., страховые полисы – 400 руб.

3. Какую сумму налога Даша должна заплатить от полученной суммы?

Задача на самозанятость «Программист»

Вадиму 17 лет, он учится в 11-м классе. Вадим с детства увлекается информационно коммуникационными технологиями, интересуется языками программирования. Вадим стремится усовершенствовать свои навыки, поэтому недавно окончил курсы по верстке веб – страниц.

Верстка веб-страниц – разработка визуальной части сайта, опираясь на макет дизайнера.

Вадим решил монетизировать свои знания, поэтому разместил портфолио с личными достижениями на фриланс – бирже. Вадиму стали поступать заказы.

Фриланс-биржа – специализированный сервис, являющийся посредником между тем, кому необходима услуга, и тем, кто ее предоставляет.

Вадим считает, что не должен платить никаких налогов, поскольку

- во-первых, он несовершеннолетний;
- во-вторых, он работает удаленно;
- в-третьих, сумма, которую он зарабатывает в месяц, не превышает 25 000 руб., да и не каждый месяц он получает деньги.

ВОПРОСЫ:

1) Прав ли Вадим?

2) Какой доход будет у Вадима за летние каникулы, если он в первый месяц создал сайт трем предпринимателям малого бизнеса, оставшиеся летние месяцы занимался рекламой и продвижением сайтов, оплачивая ежемесячно подписку на фриланс – бирже?

Подписка на фриланс-бирже – 500 руб., создание веб-страницы – 5000 руб, продвижение сайта – 3000 руб. в месяц, размещение рекламы – 1500 руб. в месяц.

3) Какую сумму налога Вадим должен заплатить от полученной суммы?

Задача на самозанятость «Кондитер»

Ане 17 лет, она учится в колледже, получает профессию «повар-кондитер». Очень любит печь торты, трайфлы, капкейки. С 15 лет занимается кондитерским мастерством. Сначала пекла торты для родных на какое-нибудь торжество. Это были вкусные и простенькие по оформлению кулинарные изделия. После купила

насадки и начала экспериментировать. Через год это были не только вкусные, но и красивые торты. Стали поступать заказы на ее изделия. На своей странице ВК Аня выставляет свои работы. Этот процесс ей очень нравится, она занимается любимым делом и тем более он приносит еще и доход. Подруга Анны сказала: «Тебе надо платить налог с продажи твоих вкусных и красивых изделий». А Аня считает, что она не должна платить никаких налогов, поскольку:

- во-первых, она несовершеннолетняя,
- во-вторых, кулинарное дело— это ее хобби, а не работа,
- в-третьих, сумма, которую она зарабатывает в месяц, не превышает 15 тысяч рублей, да и не каждый месяц она получает деньги.

ВОПРОСЫ:

1) Права ли Аня?

2) Аня приняла решение и оформилась как самозанятая. В декабре ей поступило много заказов от соседей на сумму 10 000 руб., а также был заказ от предприятия ООО «Рассвет» на приобретение капкейков для корпоратива на сумму 20 000 руб. С этого дохода Аня планировала купить в качестве подарка родителям кофемашину, о которой они давно мечтали. Её цена составляет 27 999 руб. Сможет ли Аня подарить родителям кофемашину на деньги от дохода за первый месяц работы в режиме самозанятости?

3) Какую сумму налога Аня должна заплатить от заработанной суммы?

Каждой группе был предложен шаблон решения задачи. Рассмотрим на примере Блог Даши перестает быть хобби, как только она начинает получать с него доход, при этом неважно, каков его размер и периодичность получения. То, что Даша несовершеннолетняя, также не освобождает ее от обязанности платить налоги. Даше нужно...(участники группы предлагают свои варианты выхода из данной ситуации)

1. Доход Даши....

2. % налога. . Сумма налога....

Проведение такого рода мероприятий помогает очертить проблемное поле в области финансовой грамотности обучающихся, в рамках заданной темы, познакомить их с возможными финансовыми рисками, формируя при этом умения планировать и управлять финансами в различных образовательных областях.

Любой школьник хочет быть социально успешным, его родители также надеются на высокий уровень благополучия своего ребенка во взрослой жизни. Поэтому актуальность развития функциональной грамотности обоснована еще и тем, что субъекты образовательного процесса заинтересованы в высоких академических и социальных достижениях обучающихся, чему способствует их функциональная грамотность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рязанова О. И., Липсиц И. В., Рязанова О. И. Финансовая грамотность. 8–9 класс : материалы для учащихся общеобразоват. организаций. М. : ВАКО, 2018. 76 с.
2. Брехова Ю. В., Алмосов А. П., Завьялов Д. Ю. Финансовая грамотность. 10–11 класс : материалы для учащихся общеобразоват. организаций. М. : ВАКО, 2018. 344 с.
3. Самозанятость в 2024 году: плюсы и минусы, виды деятельности, налоги. URL: <https://www.kp.ru/putevoditel/rabota/samozanyatost/>

ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ В РАМКАХ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ «МАТЕМАТИКА»

Выбор профессии является одним из самых важных решений в жизни каждого человека. От того, насколько осознанно и правильно мы определимся со сферой применения наших личных способностей и потенциала, зависит не только наша личная самореализация, но и эффективность нашей трудовой деятельности.

Школа играет особую роль в профессиональном самоопределении подрастающего поколения. Основная цель профориентационной работы в школе заключается в активизации процесса формирования психологической готовности учащихся к социально-профессиональному самоопределению, помогая им выбрать сферу профессиональной деятельности, оптимально соответствующую их личностным особенностям и запросам рынка труда [2].

Весной 2023 г. Министерство просвещения России объявило о разработке единой модели профориентации для школьников 6–11-х классов. Эта модель призвана систематизировать занятия по профориентации в разных регионах и школах, помочь выпускникам определиться с выбором высшего или среднего учебного заведения и в итоге способствовать развитию рынка труда и экономическому росту страны.

Новая система профориентации уже внедрена в российских школах в 2023/2024 учебном году. Обязательные уроки и занятия по профориентации стали проводиться с 1 сентября 2023 г. Это лишь часть единой профориентационной модели, в которую входят профильные классы, дополнительные материалы по предметам, экскурсии, дополнительные занятия с учетом склонностей школьников, профильное обучение, родительские собрания, уроки, классные часы, дискуссии, консультации психолога и другие мероприятия [3].

Одним из курсов внеурочной деятельности стали профориентационные занятия «Россия – мои горизонты», которые вводятся для всех учащихся 6–11-х классов. Цель этого курса – формирование готовности у школьников к профессиональному самоопределению, ознакомление с миром профессий и рынками труда.

Внедрение системы профориентации в школы является важным шагом в подготовке кадров, соответствующих потребностям общества и рынка труда. Это поможет молодым людям осознанно выбирать свою будущую профессию и успешно реализовываться в своей сфере деятельности [1].

Осуществление профориентационной работы требует усилий со стороны учителей и школьных педагогов. Целью такой работы является знакомство учащихся с тем, каким образом полученные знания в различных учебных предметах могут быть применимы в профессиональной деятельности. Учителям следует не

только преподавать основной материал по предметам, но и внедрять элементы профориентационных задач, где математика часто играет важную роль.

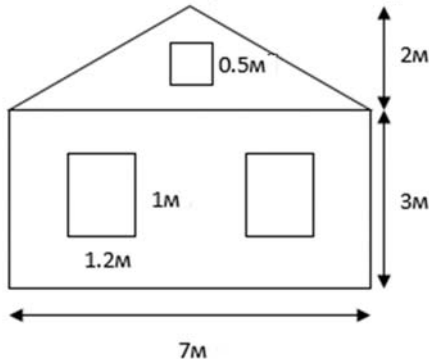
При решении профориентационных задач с использованием математики, можно выделить два основных направления. Во-первых, это работа через само содержание учебного предмета математики. Каждый учащийся должен осознавать, что умение владеть математическими знаниями является важным условием для успешного продолжения своей будущей трудовой деятельности. Во-вторых, профориентационная работа может осуществляться через решение задач, которые имеют определенное профориентационное содержание. Таким образом, мы стимулируем формирование у учащихся представлений о специфике математических методов и их применимости в различных сферах человеческой деятельности, будь то наука, производство или повседневная жизнь. Кроме того, изучение математики способствует развитию логического мышления, а также умению находить оптимальные решения.

В таблице представлены математические задачи, с которыми сталкиваются в повседневной жизни люди различных профессий.

Таблица

Профессионально-ориентированные задачи при обучении математики

Область применения	Профессионально-ориентированные задачи
В сельском хозяйстве (агроном, комбайнер, тракторист, инженер, механик, экономист, фермер и т. д.)	1. Ферма собирала 38 тонн овса с гектара. Применение технологии интенсификации позволило увеличить производство овса на 25 % на той же площади. Сколько тонн овса с гектара было собрано в этом хозяйстве? 2. Трактор весит 68 800 кг, ширина гусеницы – 0,35 м, длина зоны контакта гусеницы с землей – 2,05 м (с каждой стороны). Какой вес приходится на 1 дм² рабочей площади гусеницы? 3. Бункер комбайна вмещает около 150 кг зерна, ширина захвата составляет 5 м, рабочая скорость машины – около 5 км/ч, а средняя урожайность поля – 27 ц/га. Каково расстояние между точками загрузки комбайна и как долго бункер может быть заполнен зерном? 4. Потеря зерна от осыпания за 2–3 дня после созревания составляет 10 % урожайности. Сколько зерна с каждого гектара недополучили бы при опоздании с уборкой, если при своевременной уборке собрано 28 ц с гектара?
В строительстве (инженер-строитель, мастер строительных и монтажных работ, маляр-штукатур, кровельщик, облицовщик для внутренних и внешних работ и т. д.)	1. Рассчитайте расход бетонного раствора для заливки 10 канализационных колец с внутренним диаметром 1000 мм, внешним диаметром 1160 мм и высотой 900 мм. Если плотность бетона составляет 2200 кг/м³, сколько 5-тонных грузовиков потребуется для перевозки этих колец? 2. Если труба диаметром 60 мм и длиной 100 м требует 220 г краски на 1 м², сколько банок (3,6 кг) краски необходимо для ее нанесения? 3. Какой должна быть стойка двускатной крыши при длине балки перекрытия 6 м, чтобы угол наклона крыши был 30°? 4. Рабочий получил заказ от владельца коттеджа. Одну сторону дома необходимо обшить сайдингом. Владелец произвел замеры. Высота стен дома составляет 3 м, а ширина – 7 м. Фронтон представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого равно ширине

	стены. Высота фронтона – 2 м. В стене есть два одинаковых окна; высота окон – 1 м, ширина – 1,2 м. На стороне фронтона также есть окно, высота и ширина которого равны 0,5 м. На сайте производителя указаны рабочие размеры одной панели сайдинга: длина 3,6 м, ширина – 0,3 м. Рабочая площадь составляет 1,2 м². Рассчитайте количество панелей сайдинга, необходимое для работы мастера. 
В кулинарии (домохозяйка, повар, кондитер, технолог, бармен и т. д.)	1. Повару необходимо замариновать мясо для шашлыка в 6%-ном уксусе. Сколько воды нужно добавить в этот раствор, чтобы получить необходимую концентрацию уксуса? 2. Свежие грибы теряют 97 % своего веса при сушке; сколько свежих грибов нужно высушить, чтобы получить 8 кг сушеных грибов? 3. Цилиндрическая кастрюля имеет окружность 45 см и диаметр основания 50 см. Если при нагревании объем молока увеличивается в 1,1 раза, можно ли использовать кастрюлю для приготовления 350 порций кипяченого молока? 4. Для выпечки 100 ватрушек расходуется 5,8 кг теста, в состав которого входят 3,8 кг муки и 1,5 кг воды. Определить процентное содержание муки и воды в общем весе теста (с точностью до 0,1 %).

Связь математики и профессий позволяет материализовать знания учащихся. Данные текстовые задачи отражают реальную ситуацию, и текст таких задач имеет познавательную ценность.

Таким образом, учитель может использовать приведенные выше задачи на уроках математики: для организации работы с учетом особенностей и способностей каждого учащегося; для самостоятельной или домашней работы; в подготовке к экзаменам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Информационно-правовой портал «Гарант». URL: <https://www.garant.ru/> (дата обращения: 27.02.2024).
2. Киселенко А. В., Синельникова Н. А. Профориентация учащихся «Цифрового поколения»: опыт социологического исследования // Цифровая наука. 2020. № 7. С. 82–96.
3. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. URL: <https://fgos.ru/> (дата обращения: 27.02.2024).

ТУРНИР ПАМЯТИ АЛЕКСАНДРА АЛЕКСАНДРОВИЧА КОШКИНА

Данный математический турнир, который проводится уже третий раз, мы посвящаем памяти безвременно ушедшего от нас в 2017 г. Александра Александровича Кошкина. Кошкин Александр Александрович – учитель математики МБОУ Гимназия № 44 г. Иркутска, почетный работник общего образования РФ, кандидат технических наук, доцент, Соросовский учитель, учитель высшей категории. Он является победителем конкурса лучших учителей Российской Федерации в 2007 г., победителем II регионального конкурса профессионального мастерства в номинации «Методика обучения математики» в 2013 г., победителем III регионального конкурса профессионального мастерства в номинации «Математика» в 2014 г., победителем городского конкурса для учителей математики «Турнир математических боёв» в 2015 г., победителем конкурса на присуждение премий губернатора Иркутской области в 2016 г. «Лучший учитель».

Математические турниры являются одной из новых форм организации работы с интеллектуально одаренными детьми. Они могут включать в себя различные виды командных и личных соревнований, а также мастер-классы по темам, расширяющим знания школьников.

Первый подобный турнир, в котором участвовали учащиеся нашей гимназии, проходил в марте 2014 г. в рамках X городского открытого турнира любителей математики среди обучающихся 6-х классов, где наша команда стала победителем. И подготовили эту команду победителей учителя математики нашей гимназии Кошкин Александр Александрович и Горохов Павел Сергеевич.

Привлекательность математических соревнований, включенных в математические турниры, состоит не только в том, что они имеют ярко выраженную учебную направленность, но в том, что они проходят в увлекательной, динамичной форме, содержат интересные нестандартные задачи разного уровня сложности и разной тематической направленности.

Важной особенностью проведения турниров является их открытость как для школьников, так и для учителей математики – любой учитель имеет право участвовать как в подборе задач, так и в работе жюри.

Цель турнира: создание условий для самореализации учащихся, имеющих математические способности.

Ожидаемые результаты: мотивировать обучающихся на изучение математики, показать каким образом полезно использовать закономерности на практике; пробудить интерес к предмету, который поможет обучающимся успешно преодолеть все трудности их изучения и осознанно выбрать свой жизненный путь.

Первый математический турнир памяти Александра Александровича Кошкина прошел в нашей гимназии 16 апреля 2022 г. Выступая на открытии турнира

директор гимназии Виктор Панкрашин отметил, что данный турнир планируется сделать ежегодным и поднять его статус сначала до городского и затем до регионального. На турнире присутствовали старший сын Александра Александровича Кошкина Сергей Александрович и его супруга Галина Иннокентьевна.



Старший сын Александра Александровича Кошкина Сергей Александрович и его супруга Галина Иннокентьевна среди участников турнира

Сергей Александрович является известным финансистом, банкиром, 10 лет возглавлявшим региональный «Крона-Банк», а теперь филиал банка федерального уровня «Солидарность». От имени семьи Кошкиных они приготовили свои призы для победителей турнира – шоколадный торт для команды-победительницы и персональный приз для лучшего математика. Кроме того, от спонсоров турнира для его участников были приготовлены небольшие наборы книг по олимпиадной математике.

В жюри математического турнира вошли Анатолий Стерхов, учитель математики, председатель жюри; Наталья Шаравина, заместитель директора гимназии по НМР; Марина Кравчук, зав. кафедрой математики; Иван Пекарец, ученик 9-го «Л» класса; Дмитрий Семенов, ученик 9-го «Л» класса. В данном математическом турнире состязались две команды учеников шестых классов: команда «Гармония чисел» и ее капитан Ирина Обризанова, а также команда «Плюс на минус» и ее капитан Денис Олиневич. Членами первой команды являлись ученики 6-го «Б» класса Ева Мороз, Вера Скокова, Влада Стрельцова, Ульяна Шипицина и Егор Шорников. Во вторую команду вошли ученики 6Д класса Ирина Карелина, Ева Кувшинова, Елизавета Ли, Владислав Ляшенко и Александр Устинов. Но показать свои знания и умения в математике могли не только члены команд, но и наши болельщики. В то время, когда команды будут выполнять свои задания, наши ведущие будут предлагать им вопросы. За правильный ответ наши ассистенты в зале будут давать жетоны, которые в конце нашего мероприятия могут превратиться в медаль «Лучший знаток математики».

Турнир состоял из пяти туров: 1. Разминка. 2. Логический. 3. Графический. 4. Исторический. 5. Музыкальный. В разминке вопросы командам чередовались друг за другом. За каждый правильный ответ в пределах одной минуты можно было присуждать до двух баллов. В данном туре со счетом 17:10 победила команда 6Б класса. Во втором туре, который назывался «Логический», командам предлагалось решить несколько логических задач. За каждую задачу команды могли при правильном ответе получить два балла, но не позднее, чем за две минуты. В ходе упорной борьбы ничейный счет – 9:9. В третьем туре – «Графическом» – каждая команда получила по конверту, в котором содержится по четыре задачи геометрического содержания. В этом туре оценивалась и скорость, и правильность решения. Максимальное время на решение всех задач 20 минут. Каждое задание оценивалось максимально в 3 балла. В данном туре заслуженную победу со счетом 8:2 одержала команда 6Б класса. Четвертый тур – «Исторический». В этом туре командам предлагалось вспомнить старинные единицы измерения массы и длины. На плакатах записаны названия единиц измерения, которые применяли наш недалекие предки, а на карточках их современные аналоги. Задача состоит в том, что каждому старинному названию поставить в соответствие современное. Побеждает та команда, которая даст больше правильных ответов. В распоряжении команд три минуты. В упорной борьбе опять ничья, уже со счетом 6:6. И наконец наступил последний тур – «Музыкальный», который стал настоящим испытанием для команд. И хотя невозможно найти ни одной сферы деятельности человека, которая не была бы связана с математикой, в том числе и музыка. Во-первых, вся музыка написана семью нотами, длительность звучания нот обозначается дробями. Но ответить на вопрос «Сколько октав на клавиатуре фортепиано?» удастся не каждому школьнику. Повезло команде 6Б класса. Ее капитан Ирина Обризанова в свое время параллельно училась в музыкальной школе по классу фортепиано. Итогом данного тура стала победа 6Б класса со счетом 7:1. Некоторым утешением для 6Д класса стала победа среди болельщиков со счетом 3:1. Окончательный итог встречи – 48:31 за командой «Гармония чисел. Участники команды-победительницы получают почетные дипломы победителей с присвоением званий «Мудрейшие из мудрейших». Второе место присуждается команде 6Д класса «Плюс на минус» с вручением почетных дипломов и присвоением званий «Умнейшие их умнейших». Кроме этого, команде вручается несколько книг по олимпиадной математике от спонсора.

Второй турнир памяти Александра Александровича Кошкина прошел 03.11.2022, и был организован уже на уровне школ г. Иркутска. В нем участвовало 11 команд 5–6-х классов из различных школ города, включая лицей ИГУ и Лицей 36 РЖД. В жюри под председательством Виталия Новомировича Агейчика участвовало 11 авторитетных педагогов из разных образовательных организаций Иркутска.

Состав экспертов муниципального математического турнира для обучающихся 5–6-х классов памяти А. А. Кошкина был утвержден приказом МКУ «ИМ-ЦРО». В итоге команда гимназии 44 «Дети Пифагора» заняла первое место в турнире. Второе место поделили между собой команда «Максимум» из лицея ИГУ и команда «Неделимые» из средней школы 72. Третье место досталось команде «Локомотив» из лицея 36 РЖД.



Команда-победительница первого турнира памяти А. А. Кошкина «Гармония чисел».

Кроме того, в рамках турнира по приказу МКУ г. Иркутска «ИМЦРО» был проведен городской семинар для учителей математики и информатики 5–6-х классов «Работа с одаренными детьми как условие реализации обновленных ФГОС».



Супруга А. А. Кошкина Галина Иннокентьевна с внуками приветствуют участников и гостей турнира

Третий турнир памяти Александра Александровича Кошкина прошел 01.11.2023. Заявку на участие в этом турнире подали уже 28 команд из Иркутска, а также Ангарска и Шелехова. В связи с этим данному турниру присвоили статус открытого Иркутского математического турнира памяти А. А. Кошкина для учеников 5–8-х классов. Жюри данного турнира под председательством Стерхова Анатолий Петровича составляло уже 20 человек, которые были утверждены приказом МКУ «ИМЦРО» от 02.10.2023 № 50/3.



Жюри турнира на сцене актового зала гимназии.

В рамках данного турнира также приказом МКУ «ИМЦРО» была утверждена программа методического семинара «Работа с одаренными детьми как условие реализации обновленных ФГОС для учителей математики и информатики для обучающихся 5–8 классов». На семинаре был, в частности, представлен доклад «Система работы А. А. Кошкина с учащимися, имеющими высокую мотивацию к изучению математики». Всего на семинаре было представлено 10 докладов, посвященных актуальным вопросам работы с одаренными детьми.



На втором ряду жюри турнира среди переполненного актового зала гимназии

К участию в турнире было допущено 20 команд из городов Иркутска, Ангарска и Шелехова. В итоге среди команд 5–6-х классов первое место заняла команда «Дети Пифагора» из гимназии 44 г. Иркутска, второе место заняла команда «Гимназисты» из гимназии № 2 г. Иркутска и третье место заняла команда «Аксиома» из СОШ № 2 Шелеховского района. Среди команд 7–8-х классов первое место досталось команде «Гармония чисел» из гимназии № 44 г. Иркутска, второе место за командой «Команда 7,8» лицея ИГУ г. Иркутска и третье место за командой «Спектр» Ангарского лицея № 1.



Победители и призеры среди команд 5–6-х классов. Слева направо команды СОШ-2 Шелеховского района, команда гимназии № 2 г. Иркутска и команда гимназии № 44 г. Иркутска



Победители и призеры среди команд 7–8-х классов. Слева направо команды Ангарского лицея № 1, команда лицея ИГУ г. Иркутска и команда гимназии № 44 г. Иркутска

ДИАГНОСТИКА УРОВНЯ УЧЕБНЫХ ДОСТИЖЕНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ КАК ОДИН ИЗ ЭФФЕКТИВНЫХ СПОСОБОВ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Деятельность учителя-предметника подразумевает систематическую оценку своей работы: усвоил ли ученик тему, стоит ли еще сделать акцент на пройденном материале, есть ли необходимость на систематическом закреплении, на каких вопросах остановиться при подготовке к ГИА и многие другие вопросы, которые ежедневно появляются в педагогическом процессе.

Сегодня ФГОС ставит перед современной школой задачи, которые развивают личность обучающихся, формируют не только предметные, но также метапредметные и личностные результаты обучения. Как проанализировать развитие и сформированность этих навыков?

А если педагог готовит обучающихся к ГИА, то постоянно возникает вопрос, когда, зачем и как необходимо анализировать профессиональный рост учеников? Ответ очевиден, начиная с начальной школы необходимо отслеживать динамику, рост и развитие каждого обучающегося, особенно это актуально на основных предметах учебного плана, когда на выходе каждый ученик должен подтвердить 100 % усвоения программы.

Одной из приоритетных функций в обучении является контроль. Контроль осуществляет обратную связь. Связь, которая дает возможность быстро обнаружить проблему, проанализировать ее и скорректировать процесс обучения.

Контроль затрагивает все самые важные функции учебного процесса: образовательную, воспитывающую, развивающую.

Образовательная функция контроля достигается через привлечение всех учеников к работе над ошибками, разбору и анализу ответов своих товарищей. Учитель-предметник рекомендует фиксировать поправки и дополнения. Поэтому в процессе опроса все обучающиеся систематизируют и закрепляют пройденную тему.

Воспитывающая функция контроля достигается через мотивацию и поощрение обучающегося, в формировании чувства ответственности, долга, дисциплинированности.

Развивающая функция контроля проявляется в формировании устойчивого внимания, памяти, приёмов самоконтроля.

На уроках математики следует учитывать разный уровень подготовки учеников и их способности. Поэтому контроль осуществляется дифференцированно: подбираются задания разной степени сложности.

Основные виды контроля:

- входной контроль, оценивает и фиксирует уровень знаний и умений обучающихся в начале учебного года, т. е. то, с чем обучающиеся начинают учебный год;
- промежуточный контроль оценивает и фиксирует уровень освоения учениками нового материала, уровень знаний и умений на протяжении учебного года. Текущий контроль позволяет постоянно и своевременно получать информацию о качестве усвоения учебного материала. Основная задача промежуточного контроля – систематическое управление процессом обучения и своевременная коррекция знаний обучающихся;
- итоговый контроль, оценивает успешность усвоения материала программы к концу учебного года.

Таблица 1

[illegible]

Действия с многозначными числами (сложение, вычитание, умножение, деление на однозначное число в пределах 10 000) с использованием алгоритмов письменных арифметических действий, в том числе деления с остатком

Дополнительно к тесту, содержащему задания на проверку понимания смысла, содержания и структуры текстов, предлагается задание на проверку умения находить в тексте конкретные сведения, факты, ответы на вопросы по содержанию текста. Задание предполагает, что учащийся умеет ориентироваться в тексте и находить в нем необходимую информацию. Задание предполагает, что учащийся умеет ориентироваться в тексте и находить в нем необходимую информацию. Задание предполагает, что учащийся умеет ориентироваться в тексте и находить в нем необходимую информацию.

с использованием алгоритмов письменных арифметических действий, в том числе деления с остатком

Решение текстовых задач арифметическим способом; Периметр треугольника, прямоугольника, квадрата

Обратить внимание на:

Законмерности.

в последовательностях чисел, геометрических фигур и других объектов. Решение текстовых задач арифметическим способом

Для промежуточного контроля удобно вести информационный учет в виде таблицы, указанной ниже. Информация в таблице удобна, когда единая форма мониторинга, отлично прослеживается динамика развития каждого ученика и можно отследить развитие планируемых результатов.

Пример таблицы для анализа промежуточного контроля

Дата	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
16.11	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
20.12	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
22.01	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
12.02											
22.04											
16.05											

Зачем педагогу такое количество оценочных процедур, диаграмм, таблиц и статистики? Прежде всего, это то, что:

- позволяет выстроить учителю траекторию его профессиональной деятельности,
- позволяет наблюдать динамику развития обучающихся,
- наглядно демонстрирует родителям, которые в школу с вопросами о проблемах или успехах своих детей.

Контроль даст нужный результат, если соответствует основным требованиям:

- Педагогическая тактичность.
- Объективность. Контроль должен отражать реальное представление о знаниях обучающихся. Предпочтения педагога и его личное отношение неуместны. В ходе оценки желательно учитывать не только правильность ответа, но и рассуждения воспитанников, алгоритм и метод решения математической задачи.

- Систематичность;
- Разнообразие форм и методов контроля.

Контроль – это необходимое звено любого урока. От продуманности его организации, проведения и оценивания зависит весь процесс обучения и его эффективность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьева С. В. Современные средства оценивания результатов обучения в общеобразовательной школе : учеб. для бакалавриата и магистратуры. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Юрайт, 2019. 740 с.
2. Концепция федеральных государственных образовательных стандартов общего образования : проект / Рос. акад. образования ; под ред. А. М. Кондакова, А. А. Кузнецова. М. : Просвещение, 2008. 69 с.
3. Оценка образовательных результатов школьника : учеб.-метод. пособие / И. В. Гладкая. СПб. : КАРО, 2008. 144 с.

ОБ АВТОРАХ

Артемьева Светлана Вадимовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры МиМОМ ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Бакулина Анна Васильевна – учитель математики МБОУ г. Иркутска СОШ № 30, г. Иркутск.

Бардаханова Людмила Сократовна – учитель математики МОУ Гаханская СОШ, с. Гаханы

Бардаханова Марина Валерьевна – учитель математики МОУ Гаханская СОШ, с. Гаханы

Брель Лидия Петровна – учитель математики РЖД Лицей № 14, г. Иркутск.

Бодякина Галина Ивановна – учитель математики МКОУ «Худоеланская СОШ», с. Худоеланское.

Бычкова Ольга Ивановна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры МиМОМ ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск; учитель МБОУ г. Иркутска «Гимназия № 1», г. Иркутск.

Валько Оксана Владимировна – учитель математики МБОУ СОШ № 1, г. Тулун.

Гиматдинова Галия Нурулловна – учитель математики МАОУ СШ № 150, г. Красноярск

Губарь Оксана Михайловна – учитель математики МАОУ «СОШ № 7 имени Пичуева Л. П.», г. Усть-Илимск.

Добрынина Людмила Анатольевна – учитель математики МОУ «Магистральнинская СОШ № 2», р. п. Магистральный

Дробышева Светлана Евгеньевна – учитель математики МБОУ «Буретская СОШ», д. Буреть

Дулатова Зайнеп Асаналиевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры МиМОМ ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Ермакова Ольга Владимировна – учитель математики МБОУ СОШ «Новая Эра», г. Тулун

Зинатулина Алина Маратовна – студентка 3 курса направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика-Дополнительное образование», ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

Зыкова Елена Эдмундовна – старший преподаватель кафедры ТВидМ ИМИТ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Иванов Илья Алексеевич – студент 5-го курса направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика-Дополнительное образование», ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Клейменов Владимир Федорович – кандидат физико-математических наук, доцент, преподаватель математики ФГБОУ ВО «ИРНИТУ», факультет СПО, Машиностроительный колледж, г. Иркутск.

Кобленева Марина Анатольевна – учитель математики МКОУ «Худоеланская СОШ», с. Худоеланское.

Коваленко Елена Станиславовна – старший преподаватель кафедры МиМОМ ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Ковыршина Анна Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры МиМОМ ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Колченова Юлия Владимировна – учитель математики МБОУ г. Иркутска «Гимназия № 1», г. Иркутск.

Константинова Ирина Олеговна – учитель математики МБОУ г. Иркутска «Гимназия № 1», г. Иркутск.

Кокорина Тамара Александровна – магистрант 2-го курса направления 44. 04. 01 «Педагогическое образование», магистерская программа «Математическое образование» ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Краснова Алина Андреевна – учитель математики и информатики МБОУ г. Иркутска СОШ № 72, г. Иркутск.

Кузнецова Эльвира Васильевна – учитель математики МБОУ г. Иркутска СОШ № 6, г. Иркутск.

Кузуб Наталья Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры МиМОМ ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Куприкова Ирина Юрьевна – учитель информатики МБОУ г. Иркутска «Средняя общеобразовательная школа с углубленным изучением отдельных предметов № 14», г. Иркутск.

Курьякова Татьяна Сергеевна – старший преподаватель кафедры МиМОМ ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Лапшина Елена Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры МиМОМ ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Лищук Елена Витальевна – учитель математики МБОУ «Лицей № 1», г. Братск.

Малышенко Нина Викторовна – учитель математики МОУ Новолетниковская СОШ, с. Новолетники.

Мухина Кристина Александровна – магистрант 2-го курса направления 44. 04. 01 «Педагогическое образование», магистерская программа «Математическое образование» ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Петрова Татьяна Александровна – учитель математики МБОУ СОШ «Новая Эра», г. Тулун

Полякова Марина Николаевна – учитель математики МБОУ г. Иркутска «Средняя общеобразовательная школа с углубленным изучением отдельных предметов № 14», г. Иркутск.

Присакарь Светлана Владимировна – учитель математики МКОУ «СОШ № 3 г. Бодайбо», г. Бодайбо.

Просандеева Ирина Александровна – учитель математики МОУ Лицей, г. Черемхово.

Рыбкина Татьяна Иннокентьевна – учитель математики МБОУ «Лицей № 1», г. Братск.

Савватеева Наталья Новомировна – учитель математики и информатики МБОУ г. Иркутска СОШ № 6, г. Иркутск.

Садовская Ольга Николаевна – учитель математики МБОУ СОШ № 1, Тулун.

Собещикова Светлана Михайловна – учитель математики МБОУ СОШ № 1, г. Тулун.

Соболева Елена Владимировна – студентка 4 курса направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика-Дополнительное образование», ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Сотникова Любовь Олеговна – учитель математики МОУ Харатская СОШ, с. Харат.

Стерхов Анатолий Петрович – учитель математики МБОУ Гимназия № 44 г. Иркутска, г. Иркутск.

Фаткулова Наталья Сергеевна – учитель математики МБОУ «Большееланская СОШ», с. Большая Елань.

Чернышова Алла Александровна – учитель математики МБОУ г. Иркутска «Гимназия № 1», г. Иркутск.

Шагабутдинова Екатерина Александровна – студентка 5-го курса направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика-Дополнительное образование», ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Штыков Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры МиМОМ ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Юдина Наталья Владимировна – учитель математики МБОУ г. Иркутска СОШ № 30, г. Иркутск.

Юрчишина Наталья Александровна – учитель математики МОУ Лицей, г. Черемхово.

Научное издание

МАТЕМАТИКА И ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕМ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

Материалы
XVII Всероссийской научно-практической конференции
Иркутск, 26–28 марта 2024 г.

Материалы публикуются в авторской редакции
*Ответственность за достоверность и корректность изложения
несут авторы статей*

Подготовили к печати:
Е. С. Коваленко, Н. М. Кузуб

Темплан 2024. Поз. 46
Уч.-изд. л. 6,9

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИГУ
664082, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124